Exercice 1 : *(5 points)*

1. a divise $b \implies$ il existe k_1 tel que $b = k_1 a$
   a divise $c \implies$ il existe k_2 tel que $c = k_2 a$

$$ub + vc = uk_1 a + vk_2 a = a(uk_1 + vk_2)$$

Comme $uk_1 + vk_2 \in \mathbb{Z}$ alors a divise $ub + vc$ *$/2$ points*

2.

$$\left.\begin{array}{ll} 2k+1 & \text{divise } \ 2k+1 \\ 2k+1 & \text{divise } \ 5k-1 \end{array}\right\} \implies 2k+1 \ \text{ divise } \ (5k-1)\times 2 - 5\times(2k+1)$$

Donc $2k+1$ divise -7. *$/1$ point*
Or, l'ensemble des diviseurs de -7 est : $\{-7; -1; 1; 7\}$

- $2k+1 = -7 \implies 2k = -8 \implies k = -4$
- $2k+1 = -1 \implies 2k = -2 \implies k = -1$
- $2k+1 = 1 \implies 2k = -0 \implies k = 0$
- $2k+1 = 7 \implies 2k = 6 \implies k = 3$

Les valeurs de k possible sont donc dans l'ensemble : $\{-4; -1; 0; 3\}$. *$/2$ points*

Exercice 2 : *(5 points)*

1. $\mathcal{D}_{14} = \{-14; -7; -2; -1; 1; 2; 7; 14\}$
   $a+4$ et $b-1$ sont donc des diviseurs de 14.
   On est alors ramené à résoudre 8 systèmes d'inconnues a et b :

- $\begin{cases} a+4 = -14 \\ b-1 = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -18 \\ b = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} a+4 = 1 \\ b-1 = 14 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -3 \\ b = 15 \end{cases}$
- $\begin{cases} a+4 = -7 \\ b-1 = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -11 \\ b = -1 \end{cases}$
- $\begin{cases} a+4 = 2 \\ b-1 = 7 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -2 \\ b = 8 \end{cases}$
- $\begin{cases} a+4 = -2 \\ b-1 = -7 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -6 \\ b = -6 \end{cases}$
- $\begin{cases} a+4 = 7 \\ b-1 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases}$
- $\begin{cases} a+4 = -1 \\ b-1 = -14 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -5 \\ b = -13 \end{cases}$
- $\begin{cases} a+4 = 14 \\ b-1 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 10 \\ b = 2 \end{cases}$

Les couples $(a; b) \in \mathbb{Z}^2$ solutions de $(a+4)(b-1) = 14$ sont :

$$(-18; 0),\ (-11; -1),\ (-6; -6),\ (-5; -13),\ (-3; 15),\ (-2; 8),\ (3; 3) \text{ et } (10; 2).$$

$/4$ points

2. Seuls les couples d'entiers naturels seront solutions :

$$(3; 3) \text{ et } (10; 2).$$

$/1$ point

Exercice 3 : *(3 points)*

On pose la proposition de récurrence $\mathcal{P}_n$ suivante :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 2^n$ est un multiple de 5.

- **Initialisation :** On prend $n = 0$ On vérifie que $\mathcal{P}_/$ est vraie :
  Comme $7^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$, alors 0 est bien un multiple de 5 et $\mathcal{P}_0$ est vraie. ***/0,5 point***
- **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire que $7^n - 2^n$ est un multiple de 5.
  Je veux alors montrer que $7^{n+1} - 2^{n+1}$ est un multiple de 5. ***/1 point***
  Par hypothèse de récurrence : $7^n - 2^n$ est un multiple de 5 donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $7^n - 2^n = 5k$
  Or :
  $$7^n - 2^n = 5k \qquad \Longleftrightarrow \qquad 7^n = 5k + 2^n$$
  Et donc :
  $$\begin{aligned} 7^{n+1} &= 7 \times 7^n \\ &= 7\left(5k + 2^n\right) \\ &= 5 \times (7k) + 7\left(2^n\right) \\ &= 5 \times (7k) + (5+2)\,2^n \\ &= 5 \times (7k) + 5 \times 2^n + 2^{n+1} \\ 7^{n+1} &= 5 \times \left(7k + 2^n\right) + 2^{n+1} \end{aligned}$$
  Donc $7^{n+1} - 2^{n+1} = 5 \times \left(7k + 2^n\right)$ D'où $\mathcal{P}_{n+1}$. ***/1 point***
- **Conclusion :** La proposition étant initialisée au rang $n = 0$ et héréditaire, alors :
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 2^n$ est un multiple de 5.
  /0,5 point

Exercice 4 : *(3 points)*

1.
   Si n n'est pas impair alors n^2 n'est pas impair

   C'est-à-dire :

   Si n est pair alors n^2 est pair

   /1,5 point
2. Soit n pair alors il existe k tel que $n = 2k$.
   Donc $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$et n^2 est pair. ***/1,5 point***

Exercice 5 : *(5 points)*

1. Soit n un entier tel que son reste dans la division euclidienne par 5 est 4.
   Déterminer le reste de n par la division euclidienne par 25.
2. Soit m un entier tel que son reste dans la division euclidienne par 15 est 4.
   Déterminer le reste de m par la division euclidienne par 5.