Chapitre 10
Equations de droites

Capacités :	Exercices :	Bilan :				
Décrire les variations d'une fonction	6 à 9 p. 242					
Comparer les images de deux nombres	15, 16 p 244, 56 à 58 p 254					
Construire un tableau de variations	6 à 9 p. 242					
Déterminer l'extremum d'une fonction	15 et 16 p. 244, 64 p. 254					
Résoudre un problème d'optimisation						

I. Les équations réduites

1. Les équations du type $y = mx + p$.

Définition 10.1 : ***Droite d'équation $y = mx + p$***

Soit d une droite du plan (non parallèle à l'axe des ordonnées).

. . . .

. . . .

Autrement dit,

. . . .

De plus,

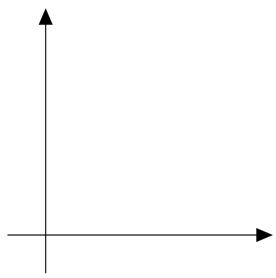
- . . . .
- . . . .

Propriété 10.2 :

On considère une droite non verticale, c'est-à-dire d'équation $y = mx + p$.

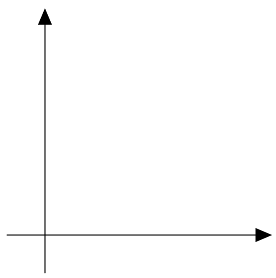
On distingue alors 3 cas :

$m > 0$



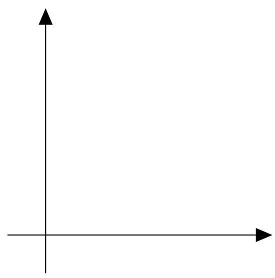
. . . .

$m < 0$



. . . .

$m = 0$



. . . .

Méthodologie 10.3 : — Tracer une droite d'équation $y = mx + p$

....

....

On procède alors de la manière suivante :

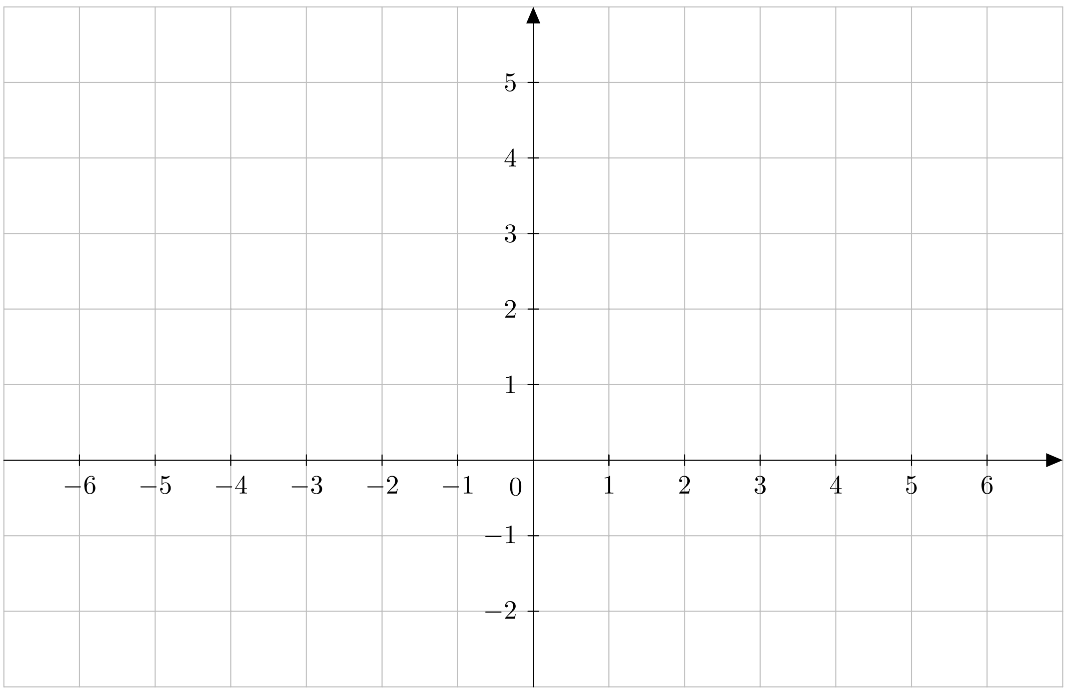
- ....
  ....
- ....
  ....
- ....
  ....

On obtiendra alors le tableau suivant :

x	x_1	x_2
y	y_1	y_2

Exemple 10.4 :

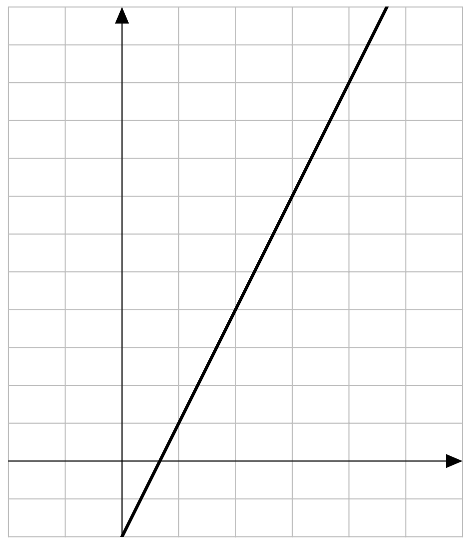
Représenter les droites d'équations $d_1 \ : \ y = 0,5x + 1, \quad d_2 \ : \ y = -2x + 1 \quad$ et $\quad d_3 : y = 5$.



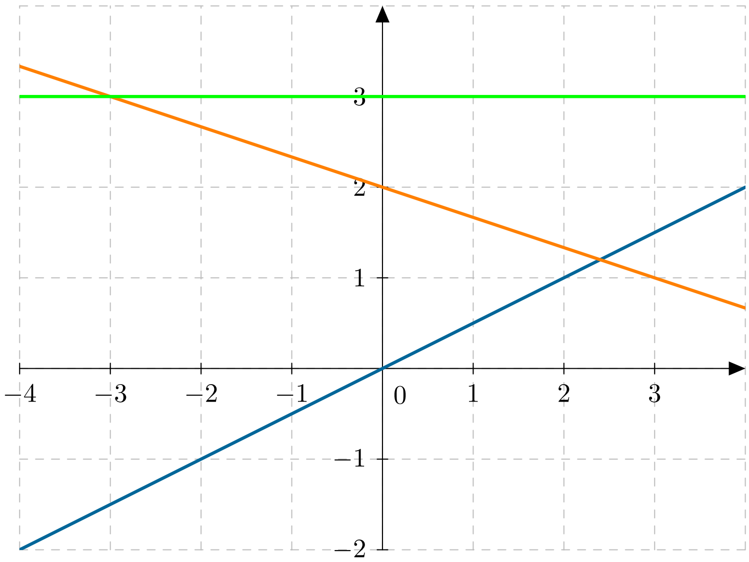
Méthodologie 10.5 : — ***Lecture du coefficient directeur***

Pour lire graphiquement le coefficient directeur d'une droite de la forme $y = mx + p$, on procède de la manière suivante :

- ....
  ....
- ....
  ....
- ....
  ....
- ....
  ....
  ....
  ....



Exemple 10.6 :



Sur le graphique ci-contre, déterminer l'équation réduite des deux droites :

....
....
....
....
....

Propriété 10.7 : ***Calcul du coefficient directeur***

On considère deux points $A\,(x_A; y_A)$ et $B\,(x_B; y_B)$ dans un plan muni d'un repère $(O; I, J)$, avec $\boldsymbol{x_A \neq x_B}$ alors le coefficient directeur de la droite (AB) est :

....

Exemple 10.8 :

Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB) avec $A\,(4; 17)$ et $B\,(6; 25)$.

....

....

....

....

Propriété 10.9 :

$M\,(x_M; y_M)$ appartient à la droite d d'équation $y = mx + p$ si et seulement si ....

Exemple 10.10 :

Le point $N\,(-2; -5)$ appartient-il à la droite d'équation $y = -3x + 5$?

Et à la droite d'équation $y = 3x + 1$?

....

....

....

....

....

Méthodologie 10.11 : ***Déterminer l'équation réduite d'une droite***

Déterminer l'équation réduite d'une droite d (non verticale) définie par les coordonnées de deux points $A\,(x_A; y_A)$ et $B\,(x_B; y_B)$, c'est déterminer les valeurs de m et p.

On procède de la manière suivante :

- ....
  ....
- ....
  ....

2. Les équations du type $x = c$.

Propriété 10.12 :

Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées (**droite verticale**) a pour équation $\boldsymbol{x = c}$.

Inversement, toute droite ayant pour équation $x = c$ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

3. Résumé

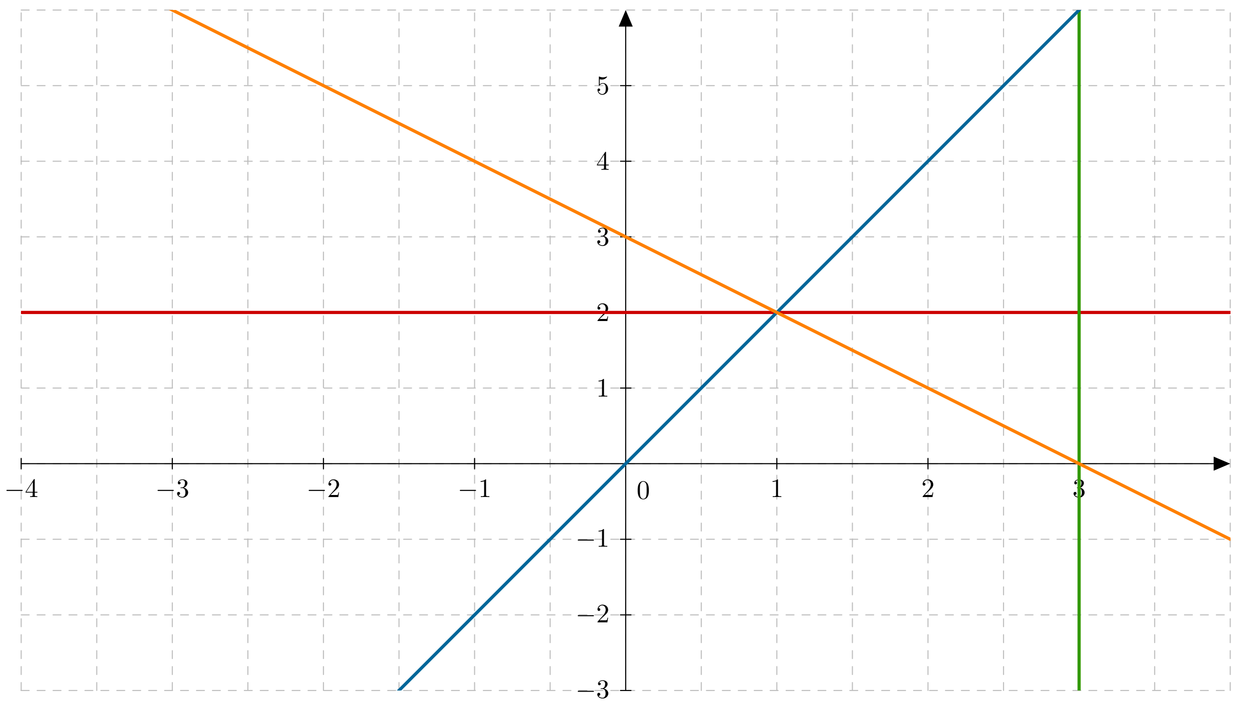
Propriété 10.13 :

On considère un plan muni d'un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ et d une droite dans ce repère, alors :

- ....
  ....
- ....
  ....

Exemple 10.14 :

Sur le graphique suivant, déterminer l'équation de chacune des 4 droites :



Exercice(s) :

Exercices 7 et 8 page 127.

II. Equations cartésiennes de droites

1. Vecteurs directeurs de droites

Définition 10.15 : ***Direction de deux droites***

On dit que deux droites ont la même direction si et seulement si elles sont parallèles.

Propriété 10.16 :

Deux droites, non parallèles à l'axe des ordonnées, ont même direction si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux.

Deux droites parallèles à l'axe des ordonnées ont même direction.

Définition 10.17 : ***Direction de deux vecteurs***

On dit que deux vecteurs non nuls ont même direction si et seulement si ils sont colinéaires.

Remarque 10.18 :

Le vecteur nul n'indique aucune direction. On dit qu'il n'a pas de direction (c'est le seul vecteur dans ce cas).

Définition 10.19 : ***Vecteur directeur d'une droite***

On dit qu'un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d si et seulement si il est colinéaire à un vecteur défini à l'aide de deux points distincts de cette droite.

Remarque 10.20 :

- Le vecteur nul n'a pas de direction, il n'est donc vecteur directeur d'aucune droite.
- Une droite a une infinité de vecteurs directeurs (tous colinéaires).
- Un vecteur non nul est vecteur directeur d'une infinité de droites (toutes parallèles).

Exemple 10.21 :

D'après l'activité précédente, donner cinq vecteurs directeurs de la droite d_A.

Propriété 10.22 :

Dans un repère $(O; I; J)$ du plan, si une droite (non parallèle à l'axe des ordonnées a pour coefficient directeur m (donc une équation de la forme $y = mx + p$), l'un de ses vecteurs directeurs est le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

Démonstration 10.23 :

On considère deux points A et B de la droite d'équation $y = mx + p$, dont les abscisses dans le repère $(O; I; J)$ sont respectivement 0 et 1.

L'ordonnée du point A est : $y_A = mx_A + p = m \times 0 + p = p$

L'ordonnée du point B est : $y_B = mx_B + p = m \times 1 + p = m + p$.

Donc on a $A(0; p)$ et $B(1; m + p)$.

Un vecteur directeur de la droite est donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dont les coordonnées sont : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m + p - p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

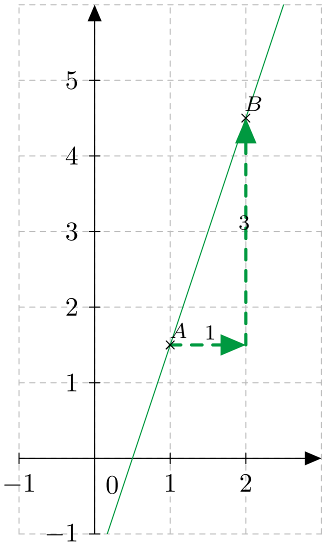
Exemple 10.24 :

Sur le graphique suivant, on a tracé la droite d'équation $y = 3x - 1,5$.

Les points $A(1; 1,5)$ et $B(2; 4,5)$ sont deux points de cette droite dont la différence des abscisses vaut 1.

On lit directement le coefficient directeur : $m = 4,5 - 1,5 = 3$

Mais on voit aussi facilement que le vecteur $\overrightarrow{AB}$, qui est aussi un vecteur directeur de la droite a pour coordonnées $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, ce qui correspond bien à $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.



2. Equations cartésiennes

Remarque 10.25 :

Pour établir l'équation d'une droite (non parallèles à l'axe des ordonnées), nous avions l'habitude jusqu'à présent d'utiliser deux points de cette droite.

Maintenant que l'on connait la notion de vecteur directeur, on peut déterminer une droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur.

Propriété 10.26 :

On considère une droite d passant par un point A et ayant pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Un point M appartient à la droite d si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Exemple 10.27 :

Soit le repère du plan $(O; I; J)$.On considère le point $A(-2; 1)$ un point de la droite d et soit le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

Donner une condition sur les coordonnées de M pour que le point M appartienne à la droite d.

Propriété 10.28 :

Dans un repère $(O; I; J)$ du plan, une droite a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ si et seulement si elle a une équation cartésienne de la forme $bx - ay + c = 0$, a et b n'étant pas nuls tous les deux et c étant un réel quelconque.

Remarque 10.29 :

- Une droite a une infinité d'équation cartésiennes puisqu'elle a une infinité de vecteurs directeurs. L'équation réduite $y = mx + p$ est l'une d'entre elles.
- Toutes les droites du plan ont des équations cartésiennes. Ce n'est que pour l'équation réduite (de la forme $y = mx + p$) que se pose le problème des droites parallèles à l'axe des ordonnées.

Exemple 10.30 :

Dans le repère $(O;I;J)$ du plan, on considère le point $A(0,5;1,5)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
2. En déduire l'équation réduite de la droite d.