Chapitre 8
Vecteurs - Repérage

Sommaire

Capacités :	**Exercices :**	**Bilan :**				
Démontrer la colinéarité de deux vecteurs						
Calculer les coordonnées d'un point ou vecteur						
Calculer les coordonnées du milieu d'un segment						
Calculer la distance entre deux points						
Justifier une configuration du plan						
Démontrer l'alignement ou le parallélisme						

I. Vecteurs colinéaires

Définition 8.1 : ***Vecteurs colinéaires***

On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si ....

....

....

Complément(s) :

Lire le savoir faire 3 p. 102 : « Utiliser la colinéarite ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 12, 61 et 62 p. 102/110.

II. Repères du plan

Définition 8.2 : ***Base du plan***

....

....

....

Définition 8.3 : ***Repère du plan***

Soient O un point du plan et $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ une base de ce plan.

Le triplet $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est appelé repère du plan.

De plus, si $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$, on a :

- Le point O ....
  ....
- (OI) ou $\left(O; \overrightarrow{i}\right)$ ....
  ....
- (OJ) ou $\left(O; \overrightarrow{j}\right)$ ....
  ....

Définition 8.4 : ***Repère orthogonal/orthonormal***

Un repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est dit **orthogonal** ....

....

....

....

Un repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ ....

....

....

....

III. Coordonnées d'un point et un vecteur

1. Coordonnées d'un point

Théorème 8.5 :

On considère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère du plan.

....

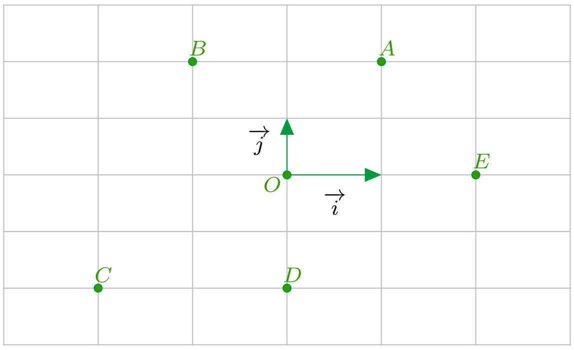
....

....

....

....

Exemple 8.6 :



Compléter les égalités suivantes :

- $\overrightarrow{OA} = \ldots \overrightarrow{i} + \ldots \overrightarrow{j}$
- $\overrightarrow{OB} = \ldots \overrightarrow{i} + \ldots \overrightarrow{j}$
- $\overrightarrow{OC} = \ldots \overrightarrow{i} + \ldots \overrightarrow{j}$
- $\overrightarrow{OD} = \ldots \overrightarrow{i} + \ldots \overrightarrow{j}$
- $\overrightarrow{OE} = \ldots \overrightarrow{i} + \ldots \overrightarrow{j}$

Définition 8.7 : ***Coordonnées d'un point***

Dans un repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, tout point M du plan vérifie l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$$

- Le couple $(x; y)$ ....
  ....
- ....
  ....
- ....
  ....

On note alors ....

Exemple 8.8 :

En reprenant l'exemple précédent, déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E et O dans le repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

....

....

....

Remarque 8.9 :

Dans un repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on a systématiquement : ....

Complément(s) :

Vidéo « Lire les coordonnées d'un point dans un repère »

2. Coordonnées d'un vecteur

Théorème 8.10 :

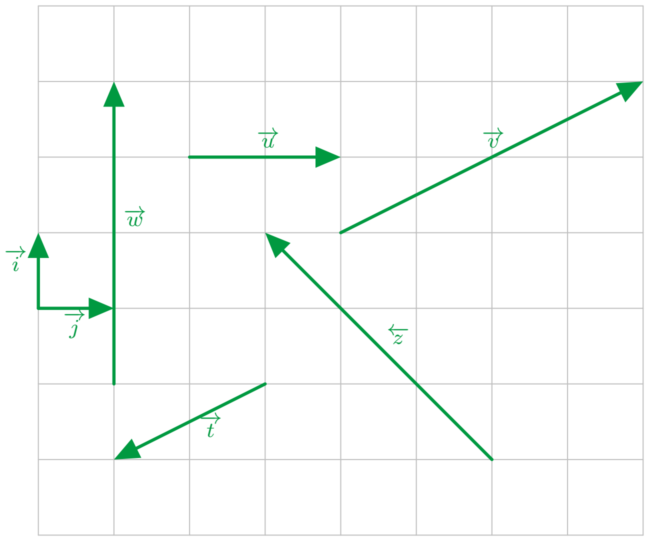
Soit $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère du plan.

....

....

....

Exemple 8.11 :



Compléter les égalités suivantes :

- $\vec{u} = \ldots\ \vec{i} + \ldots\ \vec{j}$
- $\vec{v} = \ldots\ \vec{i} + \ldots\ \vec{j}$
- $\vec{w} = \ldots\ \vec{i} + \ldots\ \vec{j}$
- $\vec{z} = \ldots\ \vec{i} + \ldots\ \vec{j}$
- $\vec{t} = \ldots\ \vec{i} + \ldots\ \vec{j}$

Définition 8.12 : ***Coordonnées d'un vecteur***

Dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, tout point M du plan vérifie l'égalité vectorielle :

$$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

- ....
  ....
- ....
  ....
- ....
  ....

On note alors ....

Exemple 8.13 :

En reprenant l'exemple précédent, déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$ et $\vec{t}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

....

....

....

Remarque 8.14 :

Dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, on a systématiquement : ....

Complément(s) :

Vidéo « Lire les coordonnées d'un vecteur »

Exercice(s) :

Exercices 13 et 14 page 103 (uniquement les questions a) et 67 page 111.

Propriété 8.15 :

On considère un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ dans lequel on a deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Alors :

....

Exemple 8.16 :

On considère un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ dans lequel on a $A(8; -5)$ et $B(1; 2)$.

Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

....
....
....
....

Complément(s) :

Vidéo « Déterminer les coordonnées d'un vecteur par les calculs »

3. Milieu d'un segment / Distance entre deux points

Propriété 8.17 : Coordonnées du milieu d'un segment

Dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.

Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $(x_I; y_I)$, avec :

$$x_I = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad y_I = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 8.18 :

Soient $A(1,2)$ et $B(-3,5)$ deux points dans un repère orthonormé.

Calculer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.

Complément(s) :

Vidéo « Calculer le milieu d'un segment »

Complément(s) :

Savoir-Faire 3 p. 72 « Calculer les coordonnées du milieu d'un segment »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 11 p. 72

Exemple 8.19 : ***Montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme***

Soient $A(3;-2)$, $B(-2;-1)$, $C(0;-3)$ trois points d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$.

Montrer que le quadrilatère AIBC est un parallélogramme.

Exemple 8.20 : — Calculer les coordonnées de l'image d'un point par une symétrie

On considère un repère $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$ dans lequel on place les points $A(2;3)$ et $B(-5;1)$.

Calculer les coordonnées de A' symétrique de A par rapport au point B.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exemple 8.21 : — Calculer les coordonnées d'un point pour obtenir un parallélogramme

On considère un repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ dans lequel on place les points $A(-1;2)$, $B(2;4)$ et $C(3;1)$.

Déterminer les coordonnées du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Propriété 8.22 :

Dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère trois points A, B et I où I est le milieu du segment $[AB]$.

On a alors :

.... et ....

Exercice(s) :

Exercices 12 p. 72 et 77 p. 81

Propriété 8.23 : Distance entre deux points

Dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ orthonormé, $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.

La distance entre les points A et B est la longueur AB et on a :

....

Exemple 8.24 :

Dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ orthonormé, on a $A(-7; 1)$ et $B(3; 4)$ deux points du plan.

Calculer AB.

....

....

....

....

....

Complément(s) :

Savoir-Faire 4 p. 73 « Calculer la distance entre deux points »

Complément(s) :

Vidéo « Calculer la longueur d'un segment »

Exercice(s) :

Exercices 13 à 15 et 92 p. 73/83

4. Somme de 2 vecteurs - Multiplication par un réel

Propriété 8.25 :

Dans un repère $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$.

✎ ***Exercice(s) :***

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}$.

....

....

....

....

....

....

....

Propriété 8.26 :

Dans un repère $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$, on considère un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $k \in \mathbb{R}$, alors le vecteur $k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$.

Exemple 8.27 :

Soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et les points C et D tels que $\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{AB}$.
Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

....

....

....

....

....

✎ ***Exercice(s) :***

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

Calculer les coordonnées des vecteurs $2\overrightarrow{u}$, $-3\overrightarrow{w}$, $3\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}+4\overrightarrow{u}$ et $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{w}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{v}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 70 p. 111

IV. Applications à l'alignement et le parallélisme

Définition 8.28 : — ***Déterminant de deux vecteurs***

Dans un repère $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

On appelle déterminant de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et on note ...., le nombre :

....

Exemple 8.29 :

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-5\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\20\end{pmatrix}$. Calculer $\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.

....

....

....

....

....

....

Propriété 8.30 :

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires $\iff$ ....

Exemple 8.31 :

Les vecteurs $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}4\\-9\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{z}\begin{pmatrix}-16\\36\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.

....

....

....

....

....

....

Complément(s) :

Vidéo « verifier si deux vecteurs sont colinéaires »

Complément(s) :

Vidéo « Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires avec le déterminant »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 71 p. 111

Propriété 8.32 : Droites parallèles

On a :

. . . .

Exemple 8.33 :

On considère les points suivants $A(2;3)$, $B(-2;1)$, $C(5;0)$ et $D(1;-2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. Les deux vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. En déduire que la position relative des deux droites (AB) et (CD).

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Complément(s) :

Vidéo « Appliquer le critère de colinéarité pour démontrer le parallélisme »

Propriété 8.34 :

On a :

A, B, et C alignés $\Longleftrightarrow$ . . . .

Exemple 8.35 :

On considère 3 points $A\,(2;5)$, $B\,(-1;1)$ et $C\,(-7;-7)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CB}$.

   ....

   ....

   ....

   ....

2. Montrer que ces deux vecteurs sont colinéaires.

   ....

   ....

   ....

   ....

3. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

   ....

   ....

   ....

   ....

Complément(s) :

Vidéo « Appliquer le critère de colinéarité pour démontrer l'alignement »