Exercice 1 : *(5 points)*

1. Soit E l'ensemble $E = \{✈; ✳; ✿; ♣; ♥\}$. Le cardinal de E^6 est :

   (a) $\boxed{15\,625}$ (b) 7 776 (c) 30 (d) 120 */1 point*

2. Le digicode de la porte d'entrée de Théo est composé des chiffres de 0 à 9 ainsi que deux lettres A et B. Le code à saisir est composé de 5 caractères : une lettre, suivi de 3 chiffres différents, suivis d'une lettre (possiblement la même que la première). Par exemple, un code possible est $A329A$.
   Combien de codes différents peut alors saisir Antoine pour rentrer chez son ami Théo (qui habite à moins d'un kilomètre de chez lui) pour « faire du sport » ?

   (a) 248 832 (b) 4 000 (c) $\boxed{2\,880}$ (d) 1440 */1 point*

3. Mme R., professeur d'anglais et mannequin à ses heures perdues, agacée par les paroles incessantes d'un de ses élèves de Terminale, Romain, lui donne une punition : *« I want you to write all words which have between 2 and 4 letters (with an sense or not) and I want your punition for Monday ! ! ! »*.
   Il se demande alors combien de mots il doit y avoir au total dans sa punition et pose sa question à son professeur de mathématiques. Que lui répond son professeur de mathématiques ?

   (a) 475 228 (b) 456 976 (c) 12 (d) $\boxed{\text{« Bien fait ! »}}$ */1 point*

4. $\dfrac{24 \times 25 \times \cdots \times 120}{1 \times 2 \times \cdots 10}$ peut s'écrire :

   (a) $\dfrac{120!}{10!}$ (b) 334 768 770 (c) 12! (d) $\boxed{\dfrac{120!}{23! \times 10!}}$ */1 point*

5. Ségolène dispose, dans sa garde-robe, de 12 paires de chaussures, 45 paires de chaussettes, 7 robes, 6 jupes et 24 hauts. Ségolène ne sort jamais sans avoir mis une paire de chaussettes, une paire de chaussures et complète sa tenue par soit une robe soit une jupe et un haut.
   Combien de tenues différentes peut alors créer cette reine du shopping ?

   (a) 544 320 (b) $\boxed{81\,540}$ (c) 3 924 (d) Ségo$\neq$ RDS */1 point*

Exercice 2 : ***(5 points)***

1. (a) $1,1^n$ est de la forme q^n avec $q = 1,1 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,1^n = +\infty$.
   Par produit,
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$
/1,5 point

   (b) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty$ donc, par somme, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$
/1,5 point

2. On considère la suite (w_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $w_n = \dfrac{n^2+1}{3n^2-n}$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned} w_n &= \frac{n^2+1}{3n^2-n} \\ &= \frac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3-\dfrac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{1+\dfrac{1}{n^2}}{3-\dfrac{1}{n}} \end{aligned}$$
/1,5 point

   (b) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ donc par somme, puis quotient, on obtient :
$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{1}{3}$$
/0,75 point

Exercice 3 : *(10 points)*

On considère la suite (u_n) (suite arithmético-géométrique) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 8 \quad n \geqslant 0 \end{cases}$$

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : calcul de la limite

1. Démontrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.
2. Justifier alors que la suite (u_n) converge, puis déterminer sa limite.
   On supposera connu le résultat suivant :

   Si une suite (u_n) converge et est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ alors sa limite ℓ vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$.

Partie B : étude d'un algorithme

L'objectif de cette partie est de déterminer le rang N à partir duquel, lorsque $n \geqslant N$, tous les termes de la suite (u_n) vérifient $|u_n - 16| < 10^{-6}$.

1. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie le rang N demandé dans l'objectif ci-dessus :

```
def LaFonctionDeThotho() :
    n = .........
    u =.........
    While ................ :
        n = .........
        u = .........
    return(........)
```

2. Répondre à l'objectif de cette partie à l'aide de la calculatrice.
   On détaillera la réponse en expliquant les étapes faites à la calculatrice.