Définition : Fonction continue

Une fonction f est continue sur un intervalle I si et seulement si sa courbe représentative peut être tracée en un seul morceau.

Théorème:

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Propriété :

Les fonctions affines, carré et cubique sont continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction inverse est continue sur $]-\infty;0[$ et elle est continue sur $]0;+\infty[$.
La fonction racine carré est continue sur $[0;+\infty[$.
La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction logarithme népérien est continue sur $]0;+\infty[$.

Propriété :

Toute fonction construite comme somme, produit, inverse, quotient ou composée à partir des fonctions de référence est continue sur l'intervalle où elle est définie.

Théorème : - Théorème des Valeus Intermédiaires

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et deux réels a et b de I tels que :

- f continue sur I
- k compris entre $f(a)$ et $f(b)$

Alors l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c dans $[a;b]$.

Théorème : Théorème de la bijection

On considère deux réels a et b dans I avec $a < b$ et f une fonction définie sur I. Si :

- f est **continue** sur I
- k **compris entre** $f(a)$ **et** $f(b)$
- f strictement monotone (**strictement croissante** ou **strictement décroissante**) sur $[a;b]$

Alors l'équation $\boldsymbol{f(x) = k}$ admet **une unique solution** c dans l'intervalle $[a;b]$.

Théorème : Théorème de Bolzano

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[a;b]$.

Remarque :

- Dès qu'on veut montrer l'existence d'une solution à $f(x) = k$, on doit vérifier continuité ET k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
- Dès qu'on veut montrer l'existence d'une **UNIQUE** solution à $f(x) = k$, on doit vérifier que k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ ET la continuité de f ET la stricte monotonie.
- Si la stricte monotonie n'est pas vérifiée sur un intervalle, on découpe l'intervalle en deux (ou plus) intervalles sur lesquels f est strictement monotone.
- Dans le cas où l'intervalle $[a;b]$ est remplacé par un intervalle ouvert, on remplace les hypothèses $f(a)$ et/ou $f(b)$ par $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et/ou $\lim\limits_{x\to b} f(x)$.