Exercice 1 : *(6 points)*

1. Une représentation paramétrique de la droite d passant par $A(2;1;-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ est :

$$d:\begin{cases} x=2 & \\ y=1 & +t\ , \quad t\in\mathbb{R} \\ z=-1 & -t \end{cases}$$

/2 points

2. On résout le système dont les inconnues sont s et t suivant :

$$\begin{cases} 2=s \\ 1+t=-s+2 \\ -1-t=3s-1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2=s \\ 1+t=0 \\ -1-t=5 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} s=2 \\ t=-1 \\ t=-4 \end{cases}$$

Le système précédent n'admet pas de solution, les droites d et d', n'ont aucun point en commun : elles sont donc soit strictement parallèles soit non coplanaires.
Or, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d'.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites d et d' ne sont pas pas parallèles :

$$\boxed{d \text{ et } d' \text{ ne sont donc pas coplanaires.}}$$

/2 points

3. $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ_1 et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ_2.
On remarque que $\overrightarrow{u_1}=-2\overrightarrow{u_2}$: les deux vecteurs sont donc colinéaires et les droites Δ_1 et Δ_2 sont alors parallèles.
En prenant $t=0$, le point $M(-1;-2;-7)$ appartient à Δ_1.
Vérifions qu'il n'appartient pas à Δ_2 :

$$\begin{cases} -1=-\dfrac{3}{2}s \\ -2=\dfrac{1}{2}s+12 \\ -7=-s-6 \end{cases} \iff \begin{cases} s=\dfrac{2}{3} \\ -2=\dfrac{1}{2}s+12 \\ s=1 \end{cases}$$

Ainsi, le système suivant n'admet pas de solution et le point M n'appartient donc pas à Δ_2 :

$$\boxed{\text{les droites } \Delta_1 \text{ et } \Delta_2 \text{ sont donc strictement parallèles.}}$$

/2 points

Exercice 2 : *(5 points)*

1. On considère les points $A(1;3;5)$, $B(-2;-1;1)$ et $C(0;1;2)$.
   On a :
   $$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-4\\-4\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$
   L'ordonnée et la côte du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont égales alors que l'ordonnée et la côte du vecteur $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas égales donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
   Les points A, B et C ne sont donc pas alignés et définissent un plan. */2 points*

2. (a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{DG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$. On a :
   $$\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}4\\-3\\-5\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$$
   On cherche donc deux réels x et y tels que $\overrightarrow{DG} = x\,\overrightarrow{DE} + y\,\overrightarrow{DF}$.
   On a alors :
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{DG} = x\,\overrightarrow{DE} + y\,\overrightarrow{DF} &\iff \begin{pmatrix}4\\-3\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x-2y\\y\\5x+5y\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{cases}4 = -x-2y\\-3 = y\\-5 = 5x+5y\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}4 = -x+6\\y = -3\\-1 = x-3\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x = 2\\y = -3\\x = 2\end{cases}\end{aligned}$$
   Ainsi, on a :
   $$\boxed{\overrightarrow{DG} = 2\,\overrightarrow{DE} - 3\,\overrightarrow{DF}}$$
   /2 points

   (b) D'après la question précédente, les points D, E, F et G sont coplanaires. */1 point*

Exercice 3 : *(12 points)*

1. **Bonus :** On a :

$$\lim_{x\to+\infty} -2x+3 = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{X\to-\infty} e^X = 0$$

Donc on a :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-2x+3} = 0.$$

De plus, on a $\lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$.
Par conséquent, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

/1,5 point

2. On a :

$$f(0) = e^3 - 7 \approx \qquad \text{et} \qquad f(10) = e^{-17} + 13 \approx$$

/1,5 point

3.(a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme composée et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$f'(x) = -2e^{-2x+3} + 2 \boxed{= -2\left(e^{-2x+3} - 1\right).}$$

Ainsi, le signe de la fonction f est du signe contraire à $e^{-2x+3} - 1$. */2 points*

(b) On a :

$$\begin{aligned} e^{-2x+3} - 1 = 0 &\iff e^{-2x+3} = 1 \\ &\iff -2x+3 = 0 \\ &\iff x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} e^{-2x+3} - 1 > 0 &\iff e^{-2x+3} > 1 \\ &\iff -2x+3 > 0 \\ &\iff x < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

On a alors le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	

$\boxed{f \text{ est donc décroissante sur } \left[0; \frac{3}{2}\right]}$ car, pour tout $x \in \left[0; \frac{3}{2}\right[$, on a $f'(x) < 0$.

$\boxed{f \text{ est donc croissante sur } \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[}$ car, pour tout $x \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$, on a $f'(x) > 0$.

De plus, on a :

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + 3 - 7 = -3.$$

On a alors le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Variation de f	$e^3 - 7$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

/3 points

3.(a) • La fonction f est continue sur $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ (car dérivable), elle est strictement décroissante sur $\left[0;\frac{3}{2}\right]$, $f(0)>0$ et $f\left(\frac{3}{2}\right)<0$.

D'après le théorème de la bijection, $\boxed{f(x)=0 \text{ admet une unique solution sur } \left[0;\frac{3}{2}\right].}$

• La fonction f est continue sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ (car dérivable), elle est strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty>0$ et $f\left(\frac{3}{2}\right)<0$.

D'après le théorème de la bijection, $\boxed{f(x)=0 \text{ admet une unique solution sur } \left[\frac{3}{2};+\infty\right[.}$

Par concaténation des deux intervalles $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ et $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$, $f(x)=0$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}^+$.

/1,5 points

(b) On a :

Encadrement de β	Borne inférieure	Borne supérieure
à 1 près :	3	4
à 0, 1 près :	3, 4	3, 5
à 0, 01 près :	3, 49	3, 5

Encadrement de α	Borne inférieure	Borne supérieure
à 1 près :	0	1
à 0, 1 près :	0, 6	0, 7
à 0, 01 près :	0, 62	0, 63

/1 point

4. On a le tableau de signes suivant :

x	0		α		β		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

/1 point

5. On a :

$$f(2)=e^{-1}+4-7=e^{-1}-3 \qquad f'(2)=-2(e^{-1}-1)$$

Ainsi, une équation de T_2 est :

$$\boxed{y=-2\left(e^{-1}-1\right)(x-2)+e^{-1}-3.}$$

/1 point