Exercice 1 : *(8 points)*

1. On a :

$$f'(x) = 15x^4 + 4$$

/1 point

2. g est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x - 8$ et $v(x) = \sqrt{x} - 1$
   On a alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
   Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \\ &= 1(\sqrt{x} - 1) + (x - 8)\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} - 1 + (x - 8)\frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

/1,5 point

3. La fonction h est de la forme $k \times u$ où $k = 6$ et $u(x) = e^{x+4}$.
   Or, $u : x \longmapsto e^{x+4}$ est de la forme $x \longmapsto e^{ax+b}$ avec $a = 1$ et $b = 4$.
   Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} u'(x) &= a\, e^{ax+b} \\ &= e^{x+4} \end{aligned}$$

   Finalement, on a :

$$h'(x) = 6e^{x+4}$$

/1 point

4. i est de la forme e^u avec $u(x) = 2x^2 - 4$.
   Ainsi, on a $u'(x) = 4x$.
   Finalement, on a :

$$\begin{aligned} i'(x) &= u'(x)\, e^{u(x)} \\ &= 4x\, e^{2x^2-4}. \end{aligned}$$

/1,5 point

5. j est de la forme $\dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = 4x^2 - 3x + 8$.
   Ainsi, on a $v'(x) = 8x - 3$
   Finalement, on a :

$$\begin{aligned} j'(x) &= -\frac{v'(x)}{v(x)^2} \\ &= -\frac{8x - 3}{(4x^2 - 3x + 8)^2} \\ &= \frac{-8x + 3}{(4x^2 - 3x + 8)^2}. \end{aligned}$$

/1,5 point

6. k est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x - 1$ et $v(x) = e^x + x$.
   Ainsi, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x + 1$.
   Finalement, on a :

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{1\,(e^x + x) - (e^x + 1)\,(x - 1)}{(e^x + x)^2} \\ &= \frac{-x\, e^x + 1 + 2\, e^x}{(e^x + x)^2} \end{aligned}$$

/1,5 point

Exercice 2 : *(6 points)*

1. (a) La fonction f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 4x^2 + 7$ et $v(x) = e^x$.
   Ainsi, on a $u'(x) = 8x$ et $v'(x) = e^x$.
   Ainsi, pour tout $x \in R$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \\ &= 8x\, e^x + e^x(4x^2 + 7) \\ &= (4x^2 + 8x + 7)\, e^x. \end{aligned}$$

/1,5 point

   (b) On a :

$$f(0) = (4 \times 0^2 + 7)e^0 = 7 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = (4 \times 0^2 + 8 \times 0 + 7)e^0 = 7$$

   Ainsi, on a :

$$\mathcal{T}_0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0) \iff \mathcal{T}_0 : y = 7x + 7$$

/1,5 point

2. La fonction g est de la forme e^u avec $u(x) = x^2 - 2x + 1$.
   Ainsi, on a $u'(x) = 2x - 2$.
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)\, e^{u(x)} \\ &= (2x - 2)\, e^{x^2 - 2x + 1} \end{aligned}$$

   De plus, on a :

$$g(1) = e^{1^2 - 2 \times 1 + 1} = 1 \qquad \text{et} \qquad g'(1) = (2 \times 1 - 2)\, e^{1^2 - 2 \times 1 + 1} = 0$$

   Ainsi, on a :

$$\mathcal{T}_1 : y = g'(1)(x - 1) + g(1) \iff \mathcal{T}_1 : y = 1$$

/3 point

Exercice 3 : *(8 points)*

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f'(x) = 3x^3 + 15x^2 - 42x.$$
/1,5 point

2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned} 3x(x-2)(x+7) &= (3x^2 - 6x)(x+7) \\ &= 3x^3 + 21x^2 - 6x^2 - 42x \\ &= 3x^3 + 15x^2 - 42x \\ &= f'(x). \end{aligned}$$
/1,5 point

3. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-7		0		2		$+\infty$
Signe de $3x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+7$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

/2 points

4. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-7		0		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		↘	-843	↗	-500	↘	-528	↗	

Avec :
$$f(-7) = -843 \quad , \quad f(0) - 500 \quad \text{et} \quad f(2) = -528$$
/2 points

5. La fonction f admet un minimum qui est -843 atteint pour $x = -7$. */1 point*