

Chapitre 10

Equations et Inéquations

Sommaire

I.	Résolution d'équations	2
1.	Equations du premier degré	2
2.	Equations produit et équations quotient	4
II.	Résolution algébrique d'inéquations.	5
1.	Inéquations du premier degré	5
2.	Tableau de signe de $ax + b$	6
3.	Inéquations produit et quotient	6

I. Résolution d'équations

Propriété 10.1 :

Deux équations sont dites équivalentes lorsqu'elles possèdent les mêmes solutions.

Deux équations sont équivalentes lorsqu'on peut passer d'une équation à l'autre en effectuant les opérations suivantes (sur les deux membres de l'équation) :

- ajouter, à chaque membre, le même nombre ;
- oter, à chaque membre, le même nombre ;
- multiplier, chaque membre, par le même nombre (non nul) ;
- diviser, chaque membre, par le même nombre (non nul).

Remarque 10.2 :

Pour écrire que deux équations sont équivalentes, on utilisera le symbole \iff .

Exemple 10.3 :

Démontrer que $2x - 2 = 7 - x$ et $3x = 9$ sont équivalentes.

On a alors :

$$\begin{aligned} 2x - 2 = 7 - x &\iff 2x - 2 + x = 7 - x + x \\ &\iff 3x - 2 = 7 \\ &\iff 3x - 2 + 2 = 7 + 2 \\ &\iff 3x = 9 \end{aligned}$$

1. Equations du premier degré

Définition 10.4 : ————— Equation du 1^{er} degré —————

Une équation du premier degré est une équation équivalente à une équation de la forme $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$ où x est l'inconnue.

Exemple 10.5 :

Démontrer que les équations suivantes sont des équations du premier degré :

- $3x - 12 = 2(4 - x)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} 3x - 12 = 2(4 - x) &\iff 3x - 12 = 8 - 2x \\ &\iff 3x - 12 - 8 = 8 - 2x - 8 \\ &\iff 3x - 20 = -2x \\ &\iff 3x - 20 + 2x = -2x + 2x \\ &\iff 5x - 20 = 0. \end{aligned}$$

$5x - 20 = 0$ est bien une équation du premier degré car de la forme $ax + b = 0$ avec $a = 5$ et $b = -20$.

- $x^2 - 3x + 7 = (x - 2)^2$.

Méthode 10.6 : ————— **Résolution d'une équation du 1^{er} degré** —————

Pour résoudre une équation du premier degré, on effectuera les étapes suivantes :

1. on développe les deux membres de l'équation (si nécessaire) ;
2. on réduit les deux membres de l'équation (si nécessaire) ;
3. on isole les x dans un même membre ;
4. on détermine la valeur de x
5. on donne l'ensemble des solutions.

Exemple 10.7 : —————

Résoudre les équations suivantes :

- $3x - 12 = 7(4 - x)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} 3x - 12 = 7(4 - x) &\iff 3x - 12 = 28 - 7x && \text{(Fin de l'étape 1/ Pas d'étape 2)} \\ &\iff 3x - 12 + 7x = 28 - 7x + 7x \\ &\iff 10x - 12 = 28 \\ &\iff 10x - 12 + 12 = 28 + 12 \\ &\iff 10x = 40 && \text{(Fin de l'étape 3)} \\ &\iff \frac{10x}{10} = \frac{40}{10} \\ &\iff x = 4 && \text{(Fin de l'étape 4)} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $3x - 12 = 7(4 - x)$ est $\{4\}$ (Fin de l'étape 5).

- $x^2 - 3x + 7 = (x - 5)^2$.

Remarque 10.8 : —————

- Une équation de la forme $0x = 0$ admet une infinité de solutions (tous les nombres réels).
- Une équation de la forme $0x = c$ où $c \neq 0$, n'admet aucune solution.
- En résumé, une équation du premier degré admet donc soit aucune solution, soit une unique solution ou soit une infinité de solutions.

 **Exercice(s) :** —————

Exercice 106 p. 53

 **Exercice(s) :** —————

Résoudre les équations suivantes :

- $5x + 7 = 9x - 1$

- $-x + 12 = x + 8$

- $3(x - 1) = -(4x - 6)$

 **Exercice(s) :** —————

Devoir mis en ligne sur la plateforme d'entraînement Variations sur *Lycée Connecté* : « Entraînement équation 1er degré » (non noté).

Complément(s) :

Lire la vidéo « Résoudre une équation ».

2. Equations produit et équations quotient

Propriété 10.9 :

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

$$\blacktriangle \times \blacksquare = 0 \iff \blacktriangle = 0 \text{ ou } \blacksquare = 0$$

Complément(s) :

Lire la vidéo « Résoudre une équation produit (1) ».

Complément(s) :

Lire la vidéo « Résoudre une équation produit (2) ».

Exemple 10.10 :Résoudre $(2x + 1)(8x - 4) = 0$.Réponse : $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{2}$.**Exercice(s) :**

Exercices 108 p. 53 et 114 p. 53.

Propriété 10.11 :

Un quotient est nul si et seulement si le numérateur est nul et le dénominateur non nul.

$$\frac{\blacktriangle}{\blacksquare} = 0 \iff \blacktriangle = 0 \text{ et } \blacksquare \neq 0$$

Exemple 10.12 :Résoudre $\frac{3x + 1}{8x - 5} = 0$ et $\frac{8x - 2}{-2x + 1} = 0$.**Exercice(s) :**

Exercice 116 (sauf question b) p. 53.

Complément(s) :

Lire la vidéo « Résoudre une équation quotient (1) ».

Complément(s) :

Lire la vidéo « Résoudre une équation quotient (2) ».

II. Résolution algébrique d'inéquations.**1. Inéquations du premier degré****Définition 10.13 :** ————— **Inéquation du 1^{er} degré** —————

Une inéquation est dite du premier degré si elle est équivalente à une inéquation de la forme $ax + b > 0$ ou $ax + b < 0$ ou $ax + b \leq 0$ ou $ax + b \geq 0$.

Propriété 10.14 :

On transforme une inéquation en une inéquation équivalente par les opérations suivantes :

- Développer ou factoriser certains de ses termes ;
- Additionner ou soustraire un même nombre aux deux membres de l'inéquation ;
- Multiplier ou diviser par un même nombre non nul les deux membres. Dans ce cas :
 - on ne change pas le signe de l'inéquation si le nombre est positif.
 - on change le signe de l'inéquation si le nombre est négatif.

Exemple 10.15 :

Résoudre les inéquations suivantes :

• $3x - 1 \geq 0$

• $-4x + 8 > 12$

• $x + 7 < 6x - 12$

Réponse :

• $3x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{3}$

• $-4x + 8 > 12 \iff x < -1$

• $x + 7 < 6x - 12$

Complément(s) :

Savoir-Faire 8 page 49 « Résoudre des inéquations ».

 Exercice(s) :

Exercices (corrigés) 34 et 35 p. 49

2. Tableau de signe de $ax + b$

Méthode 10.16 : ————— **Tableau de signe de $ax + b$** —————

Pour donner le tableau de signe de $ax + b$, on procède de la manière suivante :

1. on résout l'équation $ax + b = 0$. La solution est notée x_0 .
2. on construit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $ax + b$	Signe de $-a$	0	Signe de a

Remarque 10.17 : —————

On pourrait retrouver le tableau de signe précédent en résolvant :

- $ax + b = 0$
- $ax + b > 0$
- $ax + b < 0$.

Exemple 10.18 : —————

Donner le tableau de signes de des expressions suivantes :

- $4x - 1$
- $-2x + 7$

Complément(s) :

Savoir-Faire 6 page 212 « Dresser le tableau de signes d'une fonction » (uniquement question 1.).

Exercice(s) :

Exercice 18 p. 212

3. Inéquations produit et quotient

Propriété 10.19 : —————

- Le produit ou le quotient de deux nombres de même signe (tous les deux positifs ou tous les deux négatifs) est un nombre positif.
- Le produit ou le quotient de deux nombres de signe contraire (l'un positif et l'autre négatif) est un nombre négatif.

Méthode 10.20 : ————— **Etudier le signe d'un produit** —————

Pour étudier le signe d'un produit $\blacktriangle \times \blacksquare$, on procède de la manière suivante :

1. on étudie le signe de chacun des facteurs \blacktriangle et \blacksquare .
2. on utilise un tableau de signe de la forme suivante :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de \blacktriangle		
Signe de \blacksquare		
Signe de $\blacktriangle \times \blacksquare$		

Exemple 10.21 : —————

Etudier le signe des expressions suivantes :

- $(3x - 1)(-4x + 5)$

- $(-x + 7)(-x - 9)$

Complément(s) :

Savoir-Faire 6 page 212 « Dresser le tableau de signes d'une fonction ».

Exercice(s) :

Exercice 19 p. 212

Méthode 10.22 : ————— **Etudier le signe d'un quotient** —————

Pour étudier le signe d'un quotient $\frac{\blacktriangle}{\blacksquare}$, on procède de la manière suivante :

1. on étudie le signe de chacun des facteurs \blacktriangle et \blacksquare .
2. on utilise un tableau de signe de la forme suivante :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de \blacktriangle		
Signe de \blacksquare		
Signe de $\frac{\blacktriangle}{\blacksquare}$		

Attention : pour chaque valeur annulant le dénominateur \blacksquare , on mettra une double barre : signifiant qu'il y a une valeur interdite !

Exemple 10.23 :

Etudier le signe des expressions suivantes :

$$\bullet \frac{3x - 1}{-4x + 5}$$

$$\bullet \frac{-x + 7}{-x - 9}$$

Exemple 10.24 :

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\bullet \frac{3x - 1}{-4x + 5} > 0$$

$$\bullet \frac{-x + 7}{-x - 9} \leq 0$$

Complément(s) :

Savoir-Faire 7 page 213 « Résoudre algébriquement une inéquation ».

 **Exercice(s) :**

Exercice 20 et 21 p. 213 (questions a. et c uniquement)