

# Chapitre 10

## Equations et Inéquations

### Sommaire

---

<b>I.</b>	<b>Résolution d'équations</b> . . . . .	<b>2</b>
1.	Equations du premier degré . . . . .	2
2.	Equations produit et équations quotient . . . . .	4
<b>II.</b>	<b>Résolution algébrique d'inéquations.</b> . . . . .	<b>5</b>
1.	Inéquations du premier degré . . . . .	5
2.	Tableau de signe de $ax + b$ . . . . .	6
3.	Inéquations produit et quotient . . . . .	6

---

## I. Résolution d'équations

### Propriété 10.1 :

Deux équations sont dites équivalentes lorsqu'elles possèdent les mêmes solutions.

Deux équations sont équivalentes lorsqu'on peut passer d'une équation à l'autre en effectuant les opérations suivantes (sur les deux membres de l'équation) :

- ajouter, à chaque membre, le même nombre ;
- oter, à chaque membre, le même nombre ;
- multiplier, chaque membre, par le même nombre (non nul) ;
- diviser, chaque membre, par le même nombre (non nul).

### Remarque 10.2 :

Pour écrire que deux équations sont équivalentes, on utilisera le symbole  $\iff$ .

### Exemple 10.3 :

Démontrer que  $2x - 2 = 7 - x$  et  $3x = 9$  sont équivalentes.

On a alors :

$$\begin{aligned} 2x - 2 = 7 - x &\iff 2x - 2 + x = 7 - x + x \\ &\iff 3x - 2 = 7 \\ &\iff 3x - 2 + 2 = 7 + 2 \\ &\iff 3x = 9 \end{aligned}$$

## 1. Equations du premier degré

### Définition 10.4 : ————— Equation du 1<sup>er</sup> degré —————

Une équation du premier degré est une équation équivalente à une équation de la forme  $ax + b = 0$  avec  $a \neq 0$  où  $x$  est l'inconnue.

### Exemple 10.5 :

Démontrer que les équations suivantes sont des équations du premier degré :

- $3x - 12 = 2(4 - x)$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} 3x - 12 = 2(4 - x) &\iff 3x - 12 = 8 - 2x \\ &\iff 3x - 12 - 8 = 8 - 2x - 8 \\ &\iff 3x - 20 = -2x \\ &\iff 3x - 20 + 2x = -2x + 2x \\ &\iff 5x - 20 = 0. \end{aligned}$$

$5x - 20 = 0$  est bien une équation du premier degré car de la forme  $ax + b = 0$  avec  $a = 5$  et  $b = -20$ .

- $x^2 - 3x + 7 = (x - 2)^2$ .

**Méthode 10.6 :** ————— **Résolution d'une équation du 1<sup>er</sup> degré** —————

Pour résoudre une équation du premier degré, on effectuera les étapes suivantes :

1. on développe les deux membres de l'équation (si nécessaire) ;
2. on réduit les deux membres de l'équation (si nécessaire) ;
3. on isole les  $x$  dans un même membre ;
4. on détermine la valeur de  $x$
5. on donne l'ensemble des solutions.

**Exemple 10.7 :** —————

Résoudre les équations suivantes :

- $3x - 12 = 7(4 - x)$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} 3x - 12 = 7(4 - x) &\iff 3x - 12 = 28 - 7x && \text{(Fin de l'étape 1/ Pas d'étape 2)} \\ &\iff 3x - 12 + 7x = 28 - 7x + 7x \\ &\iff 10x - 12 = 28 \\ &\iff 10x - 12 + 12 = 28 + 12 \\ &\iff 10x = 40 && \text{(Fin de l'étape 3)} \\ &\iff \frac{10x}{10} = \frac{40}{10} \\ &\iff x = 4 && \text{(Fin de l'étape 4)} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation  $3x - 12 = 7(4 - x)$  est  $\{4\}$  (Fin de l'étape 5).

- $x^2 - 3x + 7 = (x - 5)^2$ .

**Remarque 10.8 :** —————

- Une équation de la forme  $0x = 0$  admet une infinité de solutions (tous les nombres réels).
- Une équation de la forme  $0x = c$  où  $c \neq 0$ , n'admet aucune solution.
- En résumé, une équation du premier degré admet donc soit aucune solution, soit une unique solution ou soit une infinité de solutions.

 **Exercice(s) :** —————

Exercice 106 p. 53

 **Exercice(s) :** —————

Résoudre les équations suivantes :

- $5x + 7 = 9x - 1$

- $-x + 12 = x + 8$

- $3(x - 1) = -(4x - 6)$

 **Exercice(s) :** —————

Devoir mis en ligne sur la plateforme d'entraînement Variations sur *Lycée Connecté* : « Entraînement équation 1er degré » (non noté).

**Complément(s) :**

Lire la vidéo « Résoudre une équation ».

## 2. Equations produit et équations quotient

**Propriété 10.9 :**

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

$$\blacktriangle \times \blacksquare = 0 \iff \blacktriangle = 0 \text{ ou } \blacksquare = 0$$

**Complément(s) :**

Lire la vidéo « Résoudre une équation produit (1) ».

**Complément(s) :**

Lire la vidéo « Résoudre une équation produit (2) ».

**Exemple 10.10 :**Résoudre  $(2x + 1)(8x - 4) = 0$ .Réponse :  $x = -\frac{1}{2}$  ou  $x = \frac{1}{2}$ .**Exercice(s) :**

Exercices 108 p. 53 et 114 p. 53.

**Propriété 10.11 :**

Un quotient est nul si et seulement si le numérateur est nul et le dénominateur non nul.

$$\frac{\blacktriangle}{\blacksquare} = 0 \iff \blacktriangle = 0 \text{ et } \blacksquare \neq 0$$

**Exemple 10.12 :**Résoudre  $\frac{3x + 1}{8x - 5} = 0$  et  $\frac{8x - 2}{-2x + 1} = 0$ .**Exercice(s) :**

Exercice 116 (sauf question b) p. 53.

**Complément(s) :**

Lire la vidéo « Résoudre une équation quotient (1) ».

**Complément(s) :**

Lire la vidéo « Résoudre une équation quotient (2) ».

**II. Résolution algébrique d'inéquations.****1. Inéquations du premier degré****Définition 10.13 :** ————— **Inéquation du 1<sup>er</sup> degré** —————

Une inéquation est dite du premier degré si elle est équivalente à une inéquation de la forme  $ax + b > 0$  ou  $ax + b < 0$  ou  $ax + b \leq 0$  ou  $ax + b \geq 0$ .

**Propriété 10.14 :**

On transforme une inéquation en une inéquation équivalente par les opérations suivantes :

- Développer ou factoriser certains de ses termes ;
- Additionner ou soustraire un même nombre aux deux membres de l'inéquation ;
- Multiplier ou diviser par un même nombre non nul les deux membres. Dans ce cas :
  - on ne change pas le signe de l'inéquation si le nombre est positif.
  - on change le signe de l'inéquation si le nombre est négatif.

**Exemple 10.15 :**

Résoudre les inéquations suivantes :

•  $3x - 1 \geq 0$

•  $-4x + 8 > 12$

•  $x + 7 < 6x - 12$

Réponse :

•  $3x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{3}$

•  $-4x + 8 > 12 \iff x < -1$

•  $x + 7 < 6x - 12$

**Complément(s) :**

Savoir-Faire 8 page 49 « Résoudre des inéquations ».

** Exercice(s) :**

Exercices (corrigés) 34 et 35 p. 49

## 2. Tableau de signe de $ax + b$

**Méthode 10.16 :** ————— **Tableau de signe de  $ax + b$**  —————

Pour donner le tableau de signe de  $ax + b$ , on procède de la manière suivante :

1. on résout l'équation  $ax + b = 0$ . La solution est notée  $x_0$ .
2. on construit le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$		$x_0$		$+\infty$
Signe de $ax + b$	Signe de $-a$		0	Signe de $a$	

**Remarque 10.17 :** —————

On pourrait retrouver le tableau de signe précédent en résolvant :

- $ax + b = 0$
- $ax + b > 0$
- $ax + b < 0$ .

**Exemple 10.18 :** —————

Donner le tableau de signes de des expressions suivantes :

- $4x - 1$
- $-2x + 7$

**Complément(s) :**

Savoir-Faire 6 page 212 « Dresser le tableau de signes d'une fonction » (uniquement question 1.).

**Exercice(s) :**

Exercice 18 p. 212

## 3. Inéquations produit et quotient

**Propriété 10.19 :** —————

- Le produit ou le quotient de deux nombres de même signe (tous les deux positifs ou tous les deux négatifs) est un nombre positif.
- Le produit ou le quotient de deux nombres de signe contraire (l'un positif et l'autre négatif) est un nombre négatif.

**Méthode 10.20 :** ————— **Etudier le signe d'un produit** —————

Pour étudier le signe d'un produit  $\blacktriangle \times \blacksquare$ , on procède de la manière suivante :

1. on étudie le signe de chacun des facteurs  $\blacktriangle$  et  $\blacksquare$ .
2. on utilise un tableau de signe de la forme suivante :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $\blacktriangle$		
Signe de $\blacksquare$		
Signe de $\blacktriangle \times \blacksquare$		

**Exemple 10.21 :** —————

Etudier le signe des expressions suivantes :

•  $(3x - 1)(-4x + 5)$

•  $(-x + 7)(-x - 9)$

**Complément(s) :**

Savoir-Faire 6 page 212 « Dresser le tableau de signes d'une fonction ».

 **Exercice(s) :**

Exercice 19 p. 212

**Méthode 10.22 :** ————— **Etudier le signe d'un quotient** —————

Pour étudier le signe d'un quotient  $\frac{\blacktriangle}{\blacksquare}$ , on procède de la manière suivante :

1. on étudie le signe de chacun des facteurs  $\blacktriangle$  et  $\blacksquare$ .
2. on utilise un tableau de signe de la forme suivante :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $\blacktriangle$		
Signe de $\blacksquare$		
Signe de $\frac{\blacktriangle}{\blacksquare}$		

Attention : pour chaque valeur annulant le dénominateur  $\blacksquare$ , on mettra une double barre : signifiant qu'il y a une valeur interdite !

**Exemple 10.23 :**

Etudier le signe des expressions suivantes :

$$\bullet \frac{3x - 1}{-4x + 5}$$

$$\bullet \frac{-x + 7}{-x - 9}$$

**Exemple 10.24 :**

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\bullet \frac{3x - 1}{-4x + 5} > 0$$

$$\bullet \frac{-x + 7}{-x - 9} \leq 0$$

**Complément(s) :**

Savoir-Faire 7 page 213 « Résoudre algébriquement une inéquation ».

 **Exercice(s) :**

Exercice 20 et 21 p. 213 (questions a. et c uniquement)