

Chapitre 3

Probabilités Conditionnelles & Indépendance

Sommaire

I. Les probabilités conditionnelles	2
1. Définition	2
2. Propriétés	3
II. Les probabilités totales	4
III. Indépendance.	8
1. Indépendance de deux événements	8
2. Indépendance de deux variables aléatoires	11

Capacités :	Bilan :				
Construire et exploiter un arbre pondéré en lien avec une situation					
Utiliser les formules concernant les probabilités conditionnelles					
Etudier ou exploiter l'indépendance de deux événements					

Thomas BAYES (1702 à 1761), mathématicien anglais, s'intéressa particulièrement aux calculs des probabilités sous l'influence de MOIVRE : il a notamment permis de calculer la probabilité d'un événement connaissant « ses causes » (D'ALEMBERT utilisait le terme de « probabilité composée » dans « L'Encyclopédie »).

En médecine, un test diagnostic permet de déterminer si une personne est atteinte par une maladie ou non. Des indicateurs tels que la sensibilité ou la spécificité permettent de chiffrer la capacité de ce test à ne détecter que les porteurs de la maladie. Ces notions sont définies par des probabilités conditionnelles.



Automatismes

I. Les probabilités conditionnelles

1. Définition

Définition 3.1 : ————— *Probabilité de B sachant A* —————

On considère un événement A de probabilité non nulle.

Pour tout événement B , on appelle

ou

le nombre réel

On a alors :

.....

$P_A(B)$ se lit « ».

Exemple 3.2 : —————

On donne les probabilités suivantes :

- $P(A) = 0,25$

- $P(B) = 0,2$

- $P(A \cap B) = 0,1$

Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Remarque 3.3 : —————

$P_B(\cdot)$ est une probabilité sur l'ensemble B .

Complément(s) : —————

Savoir-Faire 1 p. 289 « Calculer une probabilité conditionnelle »

2. Propriétés

Propriété 3.4 :

Soit B un événement de probabilité non nulle.

Pour tout événement A , on a :

.....

Propriété 3.5 :

On considère deux événements A et B de probabilité non nulle.

On retrouve alors les deux formules suivantes :

..... et

Démonstration 3.6 :

Elle découle directement de la définition de $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

Exemple 3.7 :

Calculer $P(A \cap B)$ connaissant les probabilités suivantes :

$$P(A) = 0,4 \quad P(B) = 0,5 \quad \text{et} \quad P_A(B) = 0,2.$$

.....

Propriété 3.8 :

On considère deux événements A et B tels que $P(B) \neq 0$. On a alors les propriétés suivantes :

-
-

Complément(s) :

Vidéo « Calculer une probabilité conditionnelle (1) »



Complément(s) :

Vidéo « Calculer une probabilité conditionnelle (2) »



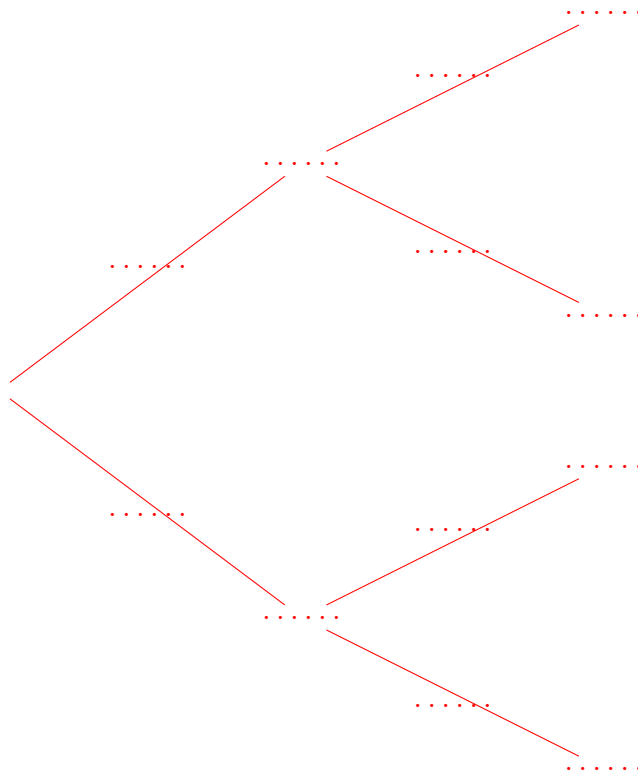
Exercice(s) :

Exercices 44 à 48 p. 298.

II. Les probabilités totales

Propriété 3.9 :

-
.....
.....
.....
.....
-
.....
.....
.....
.....
-
.....
.....
.....
.....



Complément(s) :

Savoir-Faire 2 « Illustrer une situation à l'aide d'un arbre pondéré »

Complément(s) :

Vidéo « Construire un arbre de probabilité (conditionnelle) »



Exemple 3.10 :

Une enquête a été réalisée auprès des élèves inscrits à la demi-pension (DP) d'un lycée.

Les résultats révèlent que :

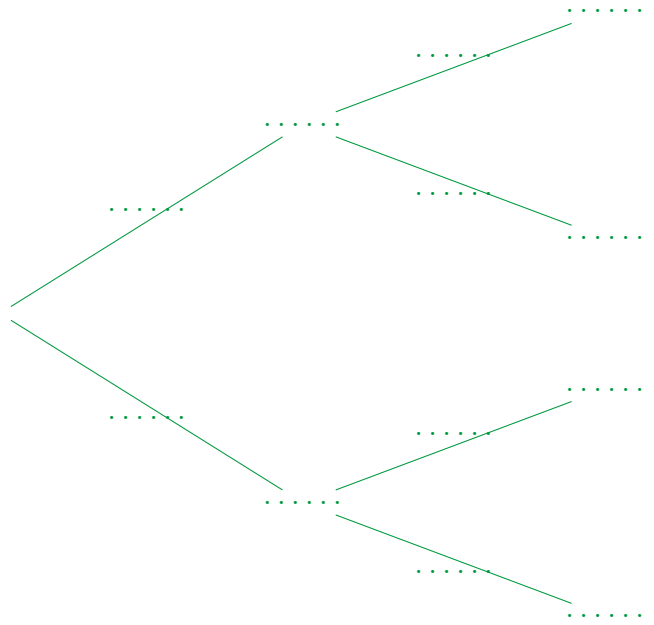
- 95% des élèves déclarent manger régulièrement à la DP et parmi ceux-ci 70% sont satisfaits de la qualité des repas ;
- 20% des élèves qui ne mangent pas régulièrement sont satisfaits de la qualité des repas.

On choisit un élève au hasard parmi les élèves inscrits à la demi-pension.

On note :

- R : « l'élève mange régulièrement à la cantine » ;
- S : « l'élève est satisfait de la qualité du repas ».

Décrire cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

**Exemple 3.11 :**

On considère un événement A tel que $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$.

Démontrer que les événements A et \bar{A} forment un système complet d'événements.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Définition 3.12 : ————— *Système complet d'événements* —————

On considère A_1, A_2, \dots, A_n ($n \in \mathbb{N}^*$) des événements vérifiant les conditions suivantes :

- :

pour tout $1 \leq i \leq n$,

- :

pour tout $1 \leq i \leq n$ et pour tout $1 \leq j \leq n, i \neq j$,

- :

.....

On dit alors que A_1, A_2, \dots, A_n forment

.....
 ou

Propriété 3.13 : ————— *Formule des probabilités totales* —————

Lorsque les événements A_1, \dots, A_n forment un système complet d'événements, on a alors :

.....

C'est-à-dire :

.....

Cette formule s'appelle

Propriété 3.14 : —————

On considère deux événements A et B. On a alors :

.....

Lorsque $P(A) \neq 0$, on a alors :

Remarque 3.15 :

Méthode 3.16 : ————— **Calcul d'une probabilité totale** —————

En pratique, lorsqu'on veut calculer la probabilité d'un événement E dont on connaît les probabilités à travers un système complet d'événements, on procède la manière suivante :

1.
.....
2.
.....
.....

Exemple 3.17 :

En reprenant l'exemple 3.10, calculer la probabilité d'élèves satisfaits par la qualité des repas.

Complément(s) :

Vidéo « Appliquer la formule des probabilités totales »



Complément(s) :

Exercice résolu 2 p. 279 « utiliser la formule des probabilités totales »

 **Exercice(s) :**

Exercices 60 à 62 p. 300.

III. Indépendance.

1. Indépendance de deux événements

Définition 3.18 : ————— *Indépendance de deux événements* —————

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

.....

Exemple 3.19 : —————

Dans une classe de 30 élèves, 10 font de la photographie, 6 du théâtre et 2 font les deux activités. On choisit un élève au hasard dans cette classe.

L'événement A : « l'élève fait de la photographie » et l'événement B : « l'élève fait du théâtre » sont-ils indépendants ?

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

 **Exercice(s) :**

Exercices 11 p. 292 et 76 à 79 p. 302.

Propriété 3.20 :

On considère deux événements A et B de probabilités non nulles.

On a équivalence entre les points suivants :

- •
- •

Remarque 3.21 :

.....

.....

.....

Propriété 3.22 :

On considère deux événements A et B .

..... \iff

Complément(s) :

Vidéo « Démontre l'indépendance entre deux événements »

**Complément(s) :**

Vidéo « Utiliser l'indépendance entre deux événements (1) »

**Complément(s) :**

Vidéo « Utiliser l'indépendance entre deux événements (2) »

**Complément(s) :**

Savoir-Faire 4 p. 292 « Etudier l'indépendance de deux événements »

Démonstration 3.23 :

Les événements B et \bar{B} forment une partition de l'univers : en effet, B et \bar{B} sont disjoints et $B \cup \bar{B} = \Omega$ lorsque $B \neq \Omega$ et $B \neq \emptyset$.

Ainsi, en appliquant la formule des probabilités totales, on a :

.....

Donc, on a :

.....

De plus, A et B sont indépendants. Donc, on a :

.....

On a alors :

$$\begin{aligned}
 P(A \cap \bar{B}) &= \dots\dots\dots \\
 &= \dots\dots\dots \\
 &= \dots\dots\dots \\
 &= \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Les événements A et \bar{B} sont alors indépendants.

Réciproquement,

.....

.....

.....

2. Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 3.24 : — *de l'indépendance de deux variables aléatoires*

On considère X et Y deux variables aléatoires. On dit que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout x pris par X et pour tout y pris par Y , les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants.

Exercice(s) :

Exercice 12 p. 293.