Chapitre 3
Probabilités Conditionnelles & Indépendance

Sommaire

Capacités :	**Exercices :**	**Bilan :**				
Construire et exploiter un arbre pondéré en lien avec une situation	11, 12, 14, 16, 17, 19 p. 293 et 65 p. 301					
Utiliser les formules concernant les probabilités conditionnelles	1, 2, 3, 4, 8 et 10 p. 292					
Etudier ou exploiter l'indépendance de deux événements	24 à 26, 28 à 30 p. 294, 37 p. 296					

Thomas BAYES (1702 à 1761), mathématicien anglais, s'interessa particulièrement aux calculs des probabilités sous l'influence de MOIVRE : il a notamment permis de calculer la probabilité d'un événement connaissant « ses causes » (D'ALEMBERT utilisait le terme de « probabilité composée » dans « L'Encyclopédie »).
En médecine, un test diagnostic permet de déterminer si une personne est atteinte par une maladie ou non. Des indicateurs tels que la sensibilité ou la spécificité permettent de chiffrer la capacité de ce test à ne détecter que les porteurs de la maladie. Ces notions sont définies par des probabilités conditionnelles.

I. Les probabilités conditionnelles

1. Définition

Définition 3.1 : ***Probabilité de B sachant A***

On considère un événement A de probabilité non nulle.

Pour tout événement B, on appelle ....

ou ....

le nombre réel ....

On a alors :

....

$P_A(B)$ se lit « .... ».

Exemple 3.2 :

On donne les probabilités suivantes :

- $P(A) = 0,25$
- $P(B) = 0,2$
- $P(A \cap B) = 0,1$

Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

....

....

....

....

....

....

....

Remarque 3.3 :

$P_B(\cdot)$ est une probabilité sur l'ensemble B.

Complément(s) :

Exercice résolu 2 p. 277 « Calculer des probabilités conditionnelles à partir d'un tableau de fréquences »

2. Propriétés

Propriété 3.4 :

Soit B un événement de probabilité non nulle.

Pour tout événement A, on a :

....

Propriété 3.5 :

On considère deux événements A et B de probabilité non nulle.

On retrouve alors les deux formules suivantes :

.... et ....

Démonstration 3.6 :

Elle découle directement de la définition de $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

Exemple 3.7 :

Calculer $P(A \cap B)$ connaissant les probabilités suivantes :

$$P(A) = 0,4 \qquad P(B) = 0,5 \quad \text{et} \quad P_A(B) = 0,2.$$

....

....

....

....

Propriété 3.8 :

On considère deux événements A et B tels que $P(B) \neq 0$. On a alors les propriétés suivantes :

- ....
- ....
- ....

Complément(s) :

Vidéo « Calculer une probabilité conditionnelle (1) »

Complément(s) :

Vidéo « Calculer une probabilité conditionnelle (2) »

Complément(s) :

Exercice résolu 1 p. 277 « Déterminer des probabilités conditionnelles »

✎ ***Exercice(s) :***

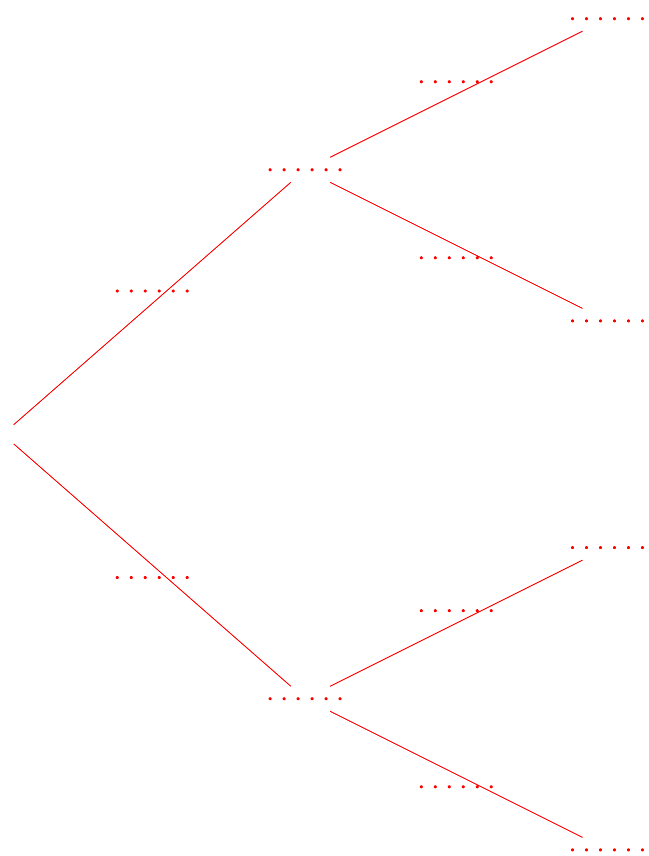
Exercices 1, 2, 3, 4, 8 et 10 p. 292.

II. Les probabilités totales

Dans la plupart des cas, les problèmes concernant les probabilités conditionnelles peuvent s'appuyer sur l'utilisation d'arbres pondérés.

Propriété 3.9 :

- ....
....
....
....
....
- ....
....
....
....
....
- ....
....
....
....
....



Exemple 3.10 :

Une enquête a été réalisée auprès des élèves inscrits à la demi-pension (DP) d'un lycée.

Les résultats révèlent que :

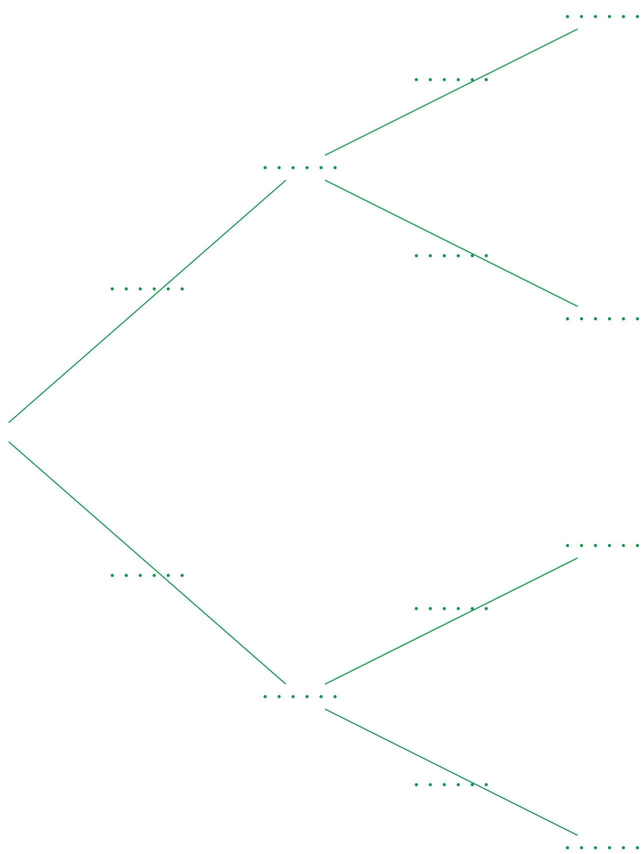
- 95% des élèves déclarent manger régulièrement à la DP et parmi ceux-ci 70% sont satisfaits de la qualité des repas ;
- 20% des élèves qui ne mangent pas régulièrement sont satisfaits de la qualité des repas.

On choisit un élève au hasard parmi les élèves inscrits à la demi-pension.

On note :

- R : « l'élève mange régulièrement à la cantine » ;
- S : « l'élève est satisfait de la qualité du repas ».

Décrire cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.



Complément(s) :

Exercice résolu 1 p. 279 « Représenter une situation à l'aide d'un arbre pondéré »

Complément(s) :

Vidéo « Construire un arbre de probabilité (conditionnelle) »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 11, 12, 14, 16, 17 et 19 p. 293

Définition 3.11 : ***Système complet d'événements***

On considère A_1, A_2, ..., A_n ($n \in \mathbb{N}^*$) des événements vérifiant les conditions suivantes :

- .... :

$$\text{pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- .... :

$$\text{pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et pour tout } 1 \leqslant j \leqslant n,\ i \neq j,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- .... :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On dit alors que A_1, A_2, ..., A_n forment ....
....
.... ou ....
....
....

Exemple 3.12 :

On considère un événement A tel que $P(A) \neq 0$ et $P(A) \neq 1$.

Démontrer que les événements A et $\overline{A}$ forment un système complet d'événements.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Propriété 3.13 : Formule des probabilités totales

Lorsque les événements A_1, ..., A_n forment un système complet d'événements, on a alors :

. . . .

C'est-à-dire :

. . . .

Cette formule s'appelle . . . .

Propriété 3.14 :

On considère deux événements A et B.

On a alors :

. . . .

Lorsque $P(A) \neq 0$, on a alors :

. . . .

Remarque 3.15 :

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Méthodologie 3.16 : Calcul d'une probabilité totale

En pratique, lorsqu'on veut calculer la probabilité d'un événement E dont on connait les probablités à travers un système complet d'événements, on procède la manière suivante :

1. . . . .
   . . . .
2. . . . .
   . . . .
   . . . .

Exemple 3.17 :

En reprenant l'exemple 3.10, calculer la probabilité d'élèves satisfaits par la qualité des repas.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Complément(s) :

Vidéo « Appliquer la formule des probabilités totales »

Complément(s) :

Exercice résolu 2 p. 279 « utiliser la formule des probabilités totales »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 16, 17 et 19 p. 293

III. Indépendance.

1. Indépendance de deux événements

Définition 3.18 : — Indépendance de deux événements

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si

....

Exemple 3.19 :

Dans une classe de 30 élèves, 10 font de la photographie, 6 du théâtre et 2 font les deux activités. On choisit un élève au hasard dans cette classe.

L'événement A : « l'élève fait de la photographie » et l'événement B : « l'élève fait du théâtre » sont-ils indépendants ?

....

....

....

....

....

....

....

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 24 à 26 et 28 à 30 p. 293

Propriété 3.20 :

On considère deux événements A et B de probabilités non nulles.

On a équivalence entre les points suivants :

- ....
- ....
- ....
- ....

Remarque 3.21 :

....

....

....

Propriété 3.22 :

On considère deux événements A et B.

.... $\Longleftrightarrow$ ....

Démonstration 3.23 :

Les événements B et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers : en effet, B et $\overline{B}$ sont disjoints et $B \cup \overline{B} = \Omega$ lorsque $B \neq \Omega$ et $B \neq \emptyset$.

Ainsi, en appliquant la formule des probabilités totales, on a :

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Donc, on a :

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

De plus, A et B sont indépendants. Donc, on a :

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B}) &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Les événements A et $\overline{B}$ sont alors indépendants.

Réciproquement, ...

....

....

....

Complément(s) :

Vidéo « Démontrer l'indépendance entre deux événements »

Complément(s) :

Vidéo « Utiliser l'indépendance entre deux événements (1) »

Complément(s) :

Vidéo « Utiliser l'indépendance entre deux événements (2) »

Complément(s) :

Exercice résolu 1 p. 281 « Etudier l'indépendance de deux événements »

2. Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 3.24 : — de l'indépendance de deux variables aléatoires

On considère X et Y deux variables aléatoires. On dit que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout x pris par X et pour tout y pris par Y, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants.

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 37 et 65 p. 296/301

✎ ***Exercice(s) :***

TD « Efficacité d'un test de dépistage »