Chapitre 7
Caractérisation vectorielle des droites et plans

Sommaire

Capacités :	Exercices :	Non Acquis	Acquis
Donner et utiliser les représentations paramétriques des droites	2, 4, 7, 12 et 15 p. 390/391		
Démontrer la coplanarité de 3 vecteurs ou 4 points	42 et 43 p. 394		

Introduction

William HAMILTON (de 1805 à 1865) est un mathématicien irlandais est d'une rare précocité à cinq ans , il lit le latin, le grec et l'hébreu. On dit qu'à treize ans il parle autant de langues que son âge.
Il est le premier à rédiger une théorie rigoureuse concernant les nombres complexes. Il construit les quaternions et étudie leurs propriétés : c'est GIBBS qui en simplifiant la théorie de HAMILTON introduit les produits scalaire et vectoriel de deux vecteurs.
Ses travaux touchent également l'optique et la dynamique.

Deux anecdotes :

> HAMILTON, ivrogne, travaillait dans la salle à manger. A sa mort (suite à un problème de goutte), on retrouva sur son bureau des assiettes contenant des os avec ses documents de recherches.
>
> HAMILTON, amoureux de littérature, aimait écrire des poèmes, dont il se vantait auprès d'un auteur anglais (WORDSWORTH) qui lui demanda d'écrire dans le domaine des mathématiques plutôt que d'écrire des poèmes.

I. Caractérisations d'une droite

Propriété 7.1 :

Une droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Remarque 7.2 :

Cette dernière propriété est la caractérisation vectorielle des droites.
A partir de cette caractérisation, on en déduit une représentation paramétrique des droites :

Théorème 7.3 : — Représentation paramétrique

On considère une droite d définie par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

La droite d est donc un système d'équation dépendant d'un paramètre t, appelé représentation paramétrique, et on a :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Démonstration 7.4 :

On considère un point $M(x; y; z)$ de la droite d.
Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont donc colinéaires.
Ainsi, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$.
En passant aux coordonnées, on obtient :

$$\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{cases} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{cases} \iff \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

□

Remarque 7.5 :

Pour donner l'expression paramétrique d'une demi-droite, il suffit de remplacer le paramètre $t \in \mathbb{R}$ par $t \in [\alpha; +\infty[$ ou $t \in]-\infty; \alpha]$.
Pour un segment, il suffit de remplacer le paramètre $t \in \mathbb{R}$ par $t \in [\alpha; \beta]$.

Exemple 7.6 :

On considère deux points $A(-2;1;0)$ et $B(2;3;1)$.
Déterminer la représentation paramétrique de chacun des ensembles suivants :

1. la droite (AB) ;
2. le segment $[AB]$;
3. la demi-droite $[AB)$.

Complément(s) :

Méthode 1 p. 379 : « Déterminer une représentation paramétrique d'une droite ».

Remarque 7.7 :

- On dit « **une** représentation paramétrique de la droite ... » et non « **la** représentation paramétrique de la droite ... » car il en existe une infinité (car il y a une infinité de points et de vecteurs directeurs de cette droite).
- En se fixant une représentation paramétrique, à chaque valeur de t correspond un point de la droite (en remplaçant le paramètre t par sa valeur dans la représentation paramétrique utilisée, on détermine ses coordonnées).
- Réciproquement, en se fixant une représentation paramétrique, à chaque point M de la droite correspond une unique valeur du paramètre t (en remplaçant les coordonnées de M par leurs valeurs dzans la représentation paramétrique utilisée, on détermine la valeur du paramètre t associé).

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 2, 4 et 7 p. 390.

Méthodologie 7.8 : Déterminer l'intersection de deux droites

Pour déterminer l'intersection de deux droites d_1 et d_2 de manière algébrique (par les calculs), on procède de la manière suivante :

1. On détermine les représentations paramétriques des deux droites d_1 et d_2.
   Attention, il ne faut pas utiliser le même paramètre pour les deux représentations (s et t par exemple) !
2. On résout le système dont les inconnues sont les deux paramètres (s et t par exemple).
3. On obtient alors plusieurs cas possible :
   - le système possède une seule solution $(s_0;t_0)$ donc les deux droites sont sécantes.
     En remplaçant s_0 ou t_0 dans l'une de deux représentations paramétriques des droites, on en déduit les coordonnées du point d'intersection.
   - le système possède une infinité de solutions : les deux droites d_1 et d_2 sont confondues.
   - le système n'admet pas de solution et ...
     — ... les vecteurs directeurs de ces deux droites sont colinéaires : les droites sont strictement parallèles.
     — ... les vecteurs directeurs de ces deux droites ne sont pas colinéaires : les deux droites sont non coplanaires.

Complément(s) :

Résumé de cours : « Positions relatives de deux droites ».

Complément(s) :

Méthode 2 p. 379 : « Exploiter lune représentation paramétrique d'une droite ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 12 et 15 p. 391 et exercice de la fiche de résumé de cours « Positions relatives de deux droites ».

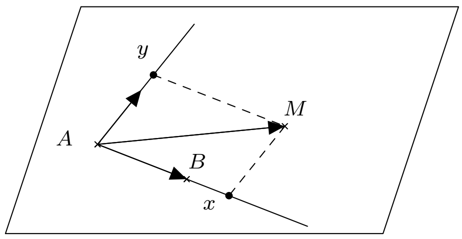
II. Caractérisation vectorielle d'un plan

Théorème 7.9 :

Un plan est engendré par un point et deux vecteurs non colinéaires.
Le plan (ABC) est donc l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC} \qquad (x;y) \in \mathbb{R}^2.$$

$(x;y)$ sont donc les coordonnées du point M dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ du plan (ABC).



Remarque 7.10 :

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs du plan (ABC) ou forment une base pour le plan (ABC).

Propriété 7.11 :

Si deux plans ont le même couple de vecteurs directeurs $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ alors ces deux plans sont parallèles.

Propriété 7.12 : Coplanarité de 3 vecteurs

Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si on peut exprimer $\overrightarrow{w}$ en fonction de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Autrement dit,

$$\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{w} \text{ coplanaires} \iff \text{il existe } (a;b)\in\mathbb{R}^2 : \overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}.$$

Propriété 7.13 : Coplanarité de 4 points

Les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si il existe $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$\overrightarrow{AD} = a\,\overrightarrow{AB} + b\,\overrightarrow{AC}.$$

Exemple 7.14 :

On considère un repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ d'un plan de l'espace.

Dans ce repère on donne deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\2\\1\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. On considère le vecteur $\overrightarrow{w}$ de coordonnées $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-2\\-7\\-4\end{pmatrix}$.

   Déterminer ses coordonnées dans la base $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 42 et 43 p. 394

Théorème 7.15 : — Représentation paramétrique d'un plan

On considère un plan P défini par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$.

Le plan P admet donc un système d'équations dépendant de deux paramètres s et t, appelé représentation paramétrique, et on a :

$$\begin{cases} x = x_A + a\,t + \alpha\,s \\ y = y_A + b\,t + \beta\,s \\ z = z_A + c\,t + \gamma\,s \end{cases} , (s; t) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple 7.16 :

Dans un repère de l'espace, on considère les points $A(1; -2; 7)$, $B(-1; 0; 5)$ et $C(-4; -1; -1)$.

1. Déterminer la représentation paramétrique du plan (ABC).
2. Donner les coordonnées de deux points C et D qui appartiennent au plan (ABC).
3. Les points $E(5; 2; 17)$ et $F(4; -1; -3)$ appartiennent-ils au plan (ABC) ?

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 49 p. 394