Chapitre 10
Variables aléatoires

I. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 10.1 : ***Variable aléatoire***

Définir une variable aléatoire sur l'univers Ω, c'est associer un nombre à chaque issue de l'expérience aléatoire.

Exemple 10.2 :

Si on lance un dé cubique, on gagne 1€ si le nombre obtenu est paire, et 3 € sinon.
Dans ce cas, la variable aléatoire associée au gain de cette expérience prendra comme valeurs 1 ou 3.

Remarque 10.3 :

Lorsque k désigne un nombre réel, l'événement "X prend la valeur k" est noté $(X = k)$.

Définition 10.4 : ***Loi de probabilité***

Définir la loi de probabilité de la variable aléatoire X, c'est associer à chaque valeur x_i prise par X la probabilité $P(X = x_i)$.
On résume cette loi de probabilité par un tableau :

k	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = k)$	p_1	p_2	...	p_n

Remarque 10.5 :

On rappelle qu'une probabilité p est toujours comprise entre 0 et 1 : $0 \leqslant p \leqslant 1$.
De plus, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

A chaque fois que l'on donnera une loi de probabilité, si la somme des probabilités du tableau donné n'est pas égale à 1, c'est qu'il y a une erreur.
En revanche, si la somme des probabilités est égale à 1, cela ne veut pas forcément dire qu'il n'y a pas d'erreur (on a peut être inversé deux probabilités par exemple)...

Exemple 10.6 :

On lance deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
A l'aide d'un tableau à double entrée, on va déterminer la loi de probabilité de la variable X associée à la somme des deux dés.
On utilise le tableau à double entrée suivant qui liste toutes les possibilités de la somme des deux dés :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Chaque case non grisée du tableau à double entrée a la même probabilité de se produire.
La variable aléatoire X est donc à valeur dans :

$$\{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}.$$

La loi de probabilité de la variable X est donc donnée par :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Complément(s) :

Vidéo « Déterminer une loi de probabilité (1) »

Complément(s) :

Savoir-Faire 1 p. 320 « Déterminer une loi de probabilité ».

Complément(s) :

Vidéo « Calculer une probabilité avec une variable aléatoire (1) »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 6, 7, 37, 38, 43, 44 p. 320 à 329.

II. Indicateurs de la loi de probabilité

Définition 10.7 : Espérance

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est la suivante :

k	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=k)$	p_1	p_2	...	p_n

L'espérance de X est :

$$\mathbb{E}(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n.$$

Complément(s) :

Vidéo « Calculer une espérance »

Définition 10.8 : Variance

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est la suivante :

k	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=k)$	p_1	p_2	...	p_n

La variance de X est donnée par :

$$\mathbb{V}(X) = p_1\left(x_1 - \mathbb{E}(X)\right)^2 + p_2\left(x_2 - \mathbb{E}(X)\right)^2 + \ldots + p_n\left(x_n - \mathbb{E}(X)\right)^2.$$

Remarque 10.9 :

On note aussi

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i - \mathbb{E}(X)\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2.\end{aligned}$$

Cette dernière formule, appelée $\mathbb{V}(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$ sera démontrée dans l'exercice 4 de ce chapitre.

Définition 10.10 : Ecart type

L'écart-type, noté σ, est donné par :

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Exemple 10.11 :

On lance deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On considère la variable X associée à la somme des deux dés.
On a donné précédemment la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

- L'espérance $\mathbb{E}(X)$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+\ldots+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36}\\ &= \frac{252}{36}\\ &= 7.\end{aligned}$$

- La variance $\mathbb{V}(X)$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \frac{1}{36}\left(2-\mathbb{E}(X)\right)^2+\frac{2}{36}\left(3-\mathbb{E}(X)\right)^2+\ldots+\frac{1}{36}\left(12-\mathbb{E}(X)\right)^2\\ &= \frac{1}{36}(2-7)^2+\frac{2}{36}(3-7))^2+\ldots+\frac{1}{36}(12-7)^2\\ &= \frac{210}{36}\\ &= \frac{35}{6}.\end{aligned}$$

Complément(s) :

Vidéo « Calculer une variance et un écart-type »

Complément(s) :

Savoir-Faire 3 p. 322 « Calculer des indicateurs ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 50 à 53 et 55 p. 330

Propriété 10.12 : ***Linéarité de l'espérance et l'écart-type***

On considère a et b deux nombres réels et X une variable aléatoire.

$$\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b \qquad \mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X).$$

Démonstration 10.13 :

On considère une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité :

k	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=k)$	p_1	p_2	...	p_n

La loi de probabilité de la variable $aX+b$ est donnée par :

k	ax_1+b	ax_2+b	...	ax_n+b
$P(aX+b=k)$	p_1	p_2	...	p_n

Pour tout $1 \leq i \leq n$ on a :

$$p_i(ax_i+b) = ap_ix_i + bp_i.$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(aX+b) &= \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i+b) \\
&= \sum_{i=1}^{n} ap_ix_i + bp_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} ap_ix_i + \sum_{i=1}^{n} bp_i \\
&= a\sum_{i=1}^{n} p_ix_i + b\sum_{i=1}^{n} p_i \\
&= a\mathbb{E}\left(X\right) + b.
\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(aX+b) &= \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i+b)^2 - \left(\mathbb{E}(aX+b)\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i(a^2x_i^2 + 2abx_i + b^2) - \left(a\mathbb{E}(X)+b\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} a^2p_ix_i^2 + \sum_{i=1}^{n} p_i2abx_i + \sum_{i=1}^{n} p_ib^2 - a^2\mathbb{E}(X)^2 - 2ab\mathbb{E}(X) - b^2 \\
&= a^2\sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 + 2ab\sum_{i=1}^{n} p_ix_i + b^2\sum_{i=1}^{n} p_i - a^2\mathbb{E}(X)^2 - 2ab\mathbb{E}(X) - b^2 \\
&= a^2\sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 + 2ab\mathbb{E}(X) + b^2 - a^2\mathbb{E}(X)^2 - 2ab\mathbb{E}(X) - b^2 \\
&= a^2\sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 - a^2\left(\mathbb{E}(X)\right)^2 \\
&= a^2\left(\sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2\right) \\
&= a^2\mathbb{V}(X).
\end{aligned}$$

Exemple 10.14 :

On lance deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On considère la variable X associée à la somme des deux dés.
On a donné précédemment, la loi de probabilité de la variable X :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

De plus, on a $\mathbb{E}(X)=7$, $\mathbb{V}(X)=\dfrac{35}{6}$ et $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{35}{6}}$.
On s'intéresse alors à la variable aléatoire Y associée au double de la somme des deux dés.
Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de Y.
On a $Y=2X$.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y)&=\mathbb{E}(2X)\\&=2\mathbb{E}(X)\\&=2\times 7\\&=14.\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y)&=\mathbb{V}(2X)\\&=4\mathbb{V}(X)\\&=4\times\frac{35}{6}\\&=\frac{70}{3}.\end{aligned}$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned}\sigma_Y&=\sqrt{\mathbb{V}(Y)}\\&=\sqrt{\frac{70}{3}}.\end{aligned}$$

Complément(s) :

Vidéo « Calculer une espérance et une variance avec Y=aX+b »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 9 p. 322.

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices bilan 89 et 98 p. 338