Devoir Maison 1

On considère $\mathscr{M}$ l'ensemble de toutes les suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. On considère une suite géométrique (u_n) de raison q, de premier terme u_0 et appartenant à $\mathscr{M}$.
   (a) Démontrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$u_0 q^n (q^2 - q - 1) = 0.$$
   (b) En déduire que la suite (u_n) est la suite nulle ou une suite géométrique de raison $\phi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
2. On considère la suite (z_n) de $\mathscr{M}$ vérifiant $z_0 = 0$ et $z_1 = 1$.
   (a) Calculer les termes z_2 jusqu'à z_6.
   (b) Déterminer a et b pour que, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on ait :
   $$z_n = a\phi^n + b\phi'^n.$$
   (c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \phi \frac{1 - \left(\dfrac{\phi'}{\phi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\dfrac{\phi'}{\phi}\right)^{n}}.$$
3. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$\sum_{k=0}^{n} z_k = z_{n+2} - 1.$$

On considère $\mathscr{M}$ l'ensemble de toutes les suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. On considère une suite géométrique (u_n) de raison q, de premier terme u_0 et appartenant à $\mathscr{M}$.
   (a) Démontrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$u_0 q^n (q^2 - q - 1) = 0.$$
   (b) En déduire que la suite (u_n) est la suite nulle ou une suite géométrique de raison $\phi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
2. On considère la suite (z_n) de $\mathscr{M}$ vérifiant $z_0 = 0$ et $z_1 = 1$.
   (a) Calculer les termes z_2 jusqu'à z_6.
   (b) Déterminer a et b pour que, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on ait :
   $$z_n = a\phi^n + b\phi'^n.$$
   (c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \phi \frac{1 - \left(\dfrac{\phi'}{\phi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\dfrac{\phi'}{\phi}\right)^{n}}.$$
3. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} z_k = z_{n+2} - 1.$$