Chapitre 16
Calcul Intégral

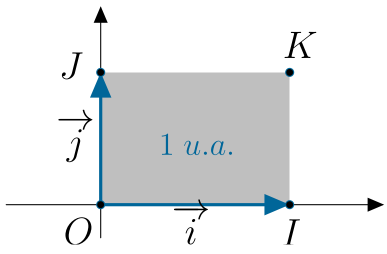
Sommaire

I. Définition de l'intégrale

Définition 16.1 : Unité d'aire

On considère un plan muni d'un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ et I, J et K les points de coordonnées respectives $(1;0)$, $(0;1)$ et $(1;1)$ dans ce repère.
On appelle *unité d'aire*, et on note *u.a.*, l'unité de mesure des aires telle que l'aire du carré $OIKJ$ est égale à une unité d'aire.
Autrement dit,

$$\mathscr{A}_{OIKJ} = 1 \ u.a.$$



1. Le cas des fonctions continues et positives

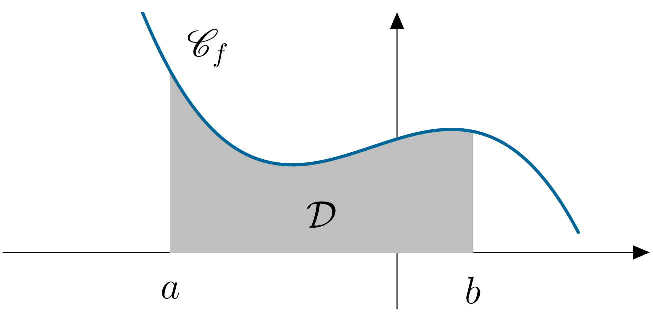
Définition 16.2 : de l'intégrale de f sur $[a;b]$

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

On appelle *intégrale de f sur $[a;b]$*, l'aire, exprimée en *u.a.*, du domaine, noté $\mathcal{D}$, délimité par :
- les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ (délimitations à gauche et à droite)
- $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses (délimitations en haut et en bas).

On la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ et dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathscr{A}_{\mathcal{D}}.$$



Remarque 16.3 :

Le domaine $\mathcal{D}$, défini dans la définition précédente, peut se noter :

$$\mathcal{D} = \left\{M(x;y) \text{ tel que } a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\right\}.$$

De plus, l'aire de ce domaine $\mathcal{D}$ est de mesure finie et il existe un rectangle qui le contient.

Remarque 16.4 :

Dans la notation $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, la variable x peut être remplacée par n'importe quelle autre variable, par exemple, par une variable t. On a donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$. Cette variable est dite « muette ».

Complément(s) :

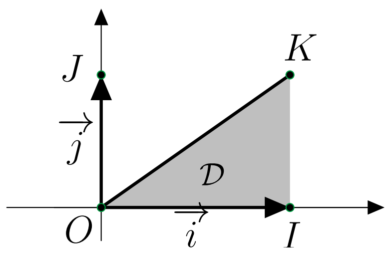
Lire la vidéo « Calculer une intégrale par des aires ».

Exemple 16.6 :

Calculons $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x\,dx$.

Ici, on a $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = x$.

On représente $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$ et on représente le domaine $\mathcal{D}$.



$\mathcal{D}$ est le triangle OIK qui est rectangle en I.
Ainsi, I_1 est l'aire de $\mathcal{D}$, exprimée en $u.a.$ Or, on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{OIK} &= \frac{OI \times IK}{2} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Complément(s) :

Méthode 1 p. 245 « Calculer des intégrales simples ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 3, 5, 6 et 10 p. 258.

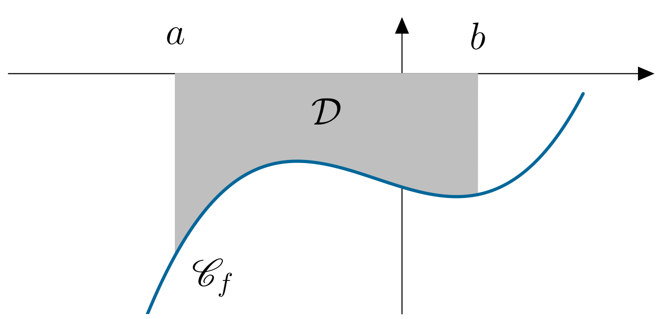
2. Le cas des fonctions continues négatives

Définition 16.7 : de l'intégrale de f sur $[a; b]$

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a; b]$.

On appelle *intégrale de f sur* $[a; b]$, l'opposée de l'aire, exprimée en u.a., du domaine, noté $\mathcal{D}$, délimité par :

- les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ (délimitations à gauche et à droite)
- $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses (délimitations en haut et en bas).



On la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, et dans ce cas , on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\mathscr{A}_{\mathcal{D}}.$$

Remarque 16.8 :

Le domaine $\mathcal{D}$, défini dans la définition précédente, peut se noter :

$$\mathcal{D} = \left\{M(x;y) \text{ tel que } a \leqslant x \leqslant b \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant 0\right\}.$$

Exemple 16.9 :

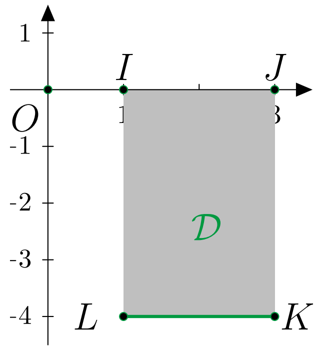
Calculons $I_2 = \displaystyle\int_1^3 -4\,dx$.

Ici, on a $a = 1$, $b = 3$ et $f(x) = -4$.

On représente $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[1;3]$, et le domaine $\mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ est le rectangle $IJKL$.
Ainsi, I_2 est l'opposée de l'aire de $\mathcal{D}$, exprimée en $u.a.$ Or, on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{IJKL} &= IJ \times JK\\ &= 4 \times 2\\ &= 8.\end{aligned}$$



Finalement, on a :

$$\int_1^3 -4\,dx = -8.$$

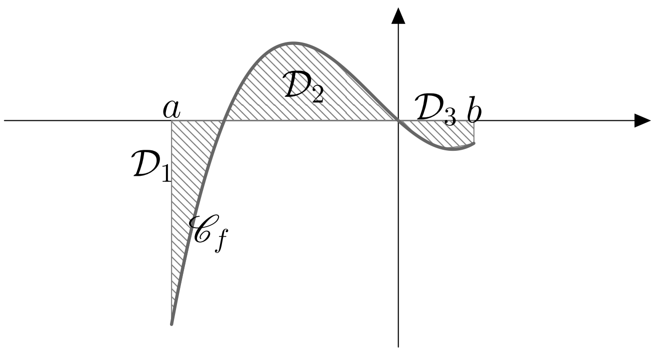
3. Le cas des fonctions continues

Définition 16.10 : de l'intégrale de f sur $[a;b]$

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
L'intégrale de f sur $[a;b]$ est la différence entre l'aire obtenue lorsque la fonction f est positive et le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est négative.
On la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Remarque 16.11 :

On a représenté une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.



Le domaine $\mathcal{D}$, correspondant à $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, est la réunion des trois domaines $\mathcal{D}_1$ (qui correspond à une intégrale où f est négative), $\mathcal{D}_2$ (qui correspond à une intégrale d'une fonction positive) et $\mathcal{D}_3$ (qui correspond à une intégrale d'une fonction négative).
Ainsi, on obtient :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathscr{A}_{\mathcal{D}_2} - \left(\mathscr{A}_{\mathcal{D}_1} + \mathscr{A}_{\mathcal{D}_3}\right).$$

Complément(s) :

La calculatrice permet de calculer **une valeur approchée** d'une intégrale !
Un tutoriel TI : « Tutoriel TI - Calculer une intégrale ».

Complément(s) :

La calculatrice permet de calculer **une valeur approchée** d'une intégrale !
Un tutoriel Casio : « Tutoriel Casio - Calculer une intégrale ».

✎ Exercice(s) :

Exercice 7 p. 258.

4. Intégrale et primitives

Propriété 16.14 :

On considère une fonction f continue sur l'intervalle I et $a \in I$.
La fonction F définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Remarque 16.15 :

On peut donner une démonstration analogue lorsque f est décroissante.

Propriété 16.16 :

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et F une de ses primitives.
On a alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \big[F(x)\big]_a^b \\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

La notation $\big[F(x)\big]_a^b$ se lit « $F(x)$ pris entre a et b ».

Exemple 16.17 :

Calculons $I_3 = \displaystyle\int_0^1 e^t\,dt$.
On pose, pour tout $t \in [0;1]$, $f(t) = e^t$.
Une primitive de f sur $[0;1]$ est la fonction F définie sur $[0;1]$ par $F(t) = e^t$.
On a alors :

$$\begin{aligned}I_3 &= \big[F(t)\big]_0^1 \\ &= F(1) - F(0) \\ &= e - 1.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_0^1 e^t\,dt = e - 1.$$

Complément(s) :

Vidéo « Calculer une intégrale (1) ».

Complément(s) :

Vidéo « Calculer une intégrale (2) ».

Complément(s) :

Vidéo « Calculer une intégrale (3) ».

Complément(s) :

Méthode 2 p. 245 : « Calculer l'aire sous la courbe d'une fonction continue et positive ».
Méthode 1 p. 247 : « Calculer une intégrale en utilisant une primitive ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 12 et 14 à 17 p. 259

II. Propriétés de l'intégrale

1. La relation de Chasles avec l'intégrale.

Propriété 16.21 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I avec a, b et c trois réels dans I.
Alors, on a :

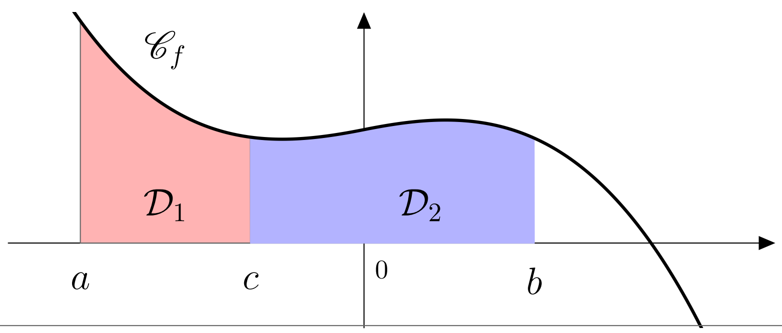
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Remarque 16.22 :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$, on a représenté les éléments suivants :

- $\int_a^c f(x)\,dx$ est l'aire du domaine $\mathcal{D}_1$ représenté par des hachures sur le graphique suivant ;
- $\int_c^b f(x)\,dx$ est l'aire du domaine $\mathcal{D}_2$ représenté par des hachures sur le graphique suivant ;

L'égalité $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ illustre alors le fait que la somme de l'aire du domaine $\mathcal{D}_1$ avec le domaine $\mathcal{D}_2$ est égale à l'aire du domaine grisé.



Propriété 16.23 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un nombre réel dans I. Alors :

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Démonstration 16.24 :

Soit f une fonction continue sur I et a un nombre réel dans I
D'après la relation de Chasles pour les intégrales, on a :

$$\int_a^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx + \int_a^a f(x)\,dx \iff \int_a^a f(x)\,dx = 2\int_a^a f(x)\,dx$$
$$\iff \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Finalement,

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

□

Remarque 16.25 :

Dans le cas d'une fonction f continue et positive sur $[a;b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire d'une figure de largeur $a-a=0$ (donc d'un segment), donc l'aire est bien égale à zéro.

Propriété 16.26 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I avec a et b deux nombres réels dans I. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Démonstration 16.27 :

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.
On note F l'une de ses primitives.
On a alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \big[F(x)\big]_a^b \\ &= F(b)-F(a) \\ &= -\big(F(a)-F(b)\big) \\ &= -\big[F(x)\big]_b^a \\ &= \int_b^a f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

□

2. Linéarité de l'intégrale

Propriété 16.28 :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, avec a et b deux nombres réels dans I.
Alors :

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

Démonstration 16.29 :

La démonstration repose sur le fait que si F est une primitive de f sur $[a;b]$ alors αF est une primitive de αf sur $[a;b]$. □

Propriété 16.30 :

On considère une fonction f continue sur un intervalle I, avec a et b deux nombres réels dans I.
Alors :

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Démonstration 16.31 :

La démonstration repose sur le fait que si F est une primitive de f sur $[a;b]$ et G est une primitive de g sur $[a;b]$ alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur $[a;b]$. □

Complément(s) :

Méthode 2 p. 247 : « Calculer des intégrales en utilisant des propriétés ».

Complément(s) :

Vidéo « Calculer une intégrale à l'aide des formules de linéarité ».

3. Positivité de l'intégrale

Propriété 16.33 :

On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$.

Si, pour tout $x \in [a;b]$, on a $f(x) \geqslant 0$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Si, pour tout $x \in [a;b]$, on a $f(x) \leqslant 0$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0.$$

Démonstration 16.34 :

- Lorsque la fonction est positive, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ représente l'aire d'un domaine, exprimé en $u.a$: elle est donc positive ou nulle.
- Lorsque la fonction est négative, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ représente l'opposée de l'aire d'un domaine, exprimé en $u.a$: elle est donc négative ou nulle. □

Exemple 16.35 :

Justifions $\displaystyle\int_1^7 \frac{1}{1+t^2}\,dt \geq 0$.

Pour tout $t \in [1;7]$, on a $\dfrac{1}{1+t^2} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on obtient :

$$\int_1^7 \frac{1}{1+t^2}\,dt \geqslant 0.$$

✎ Exercice(s) :

Exercice 13 p. 259.

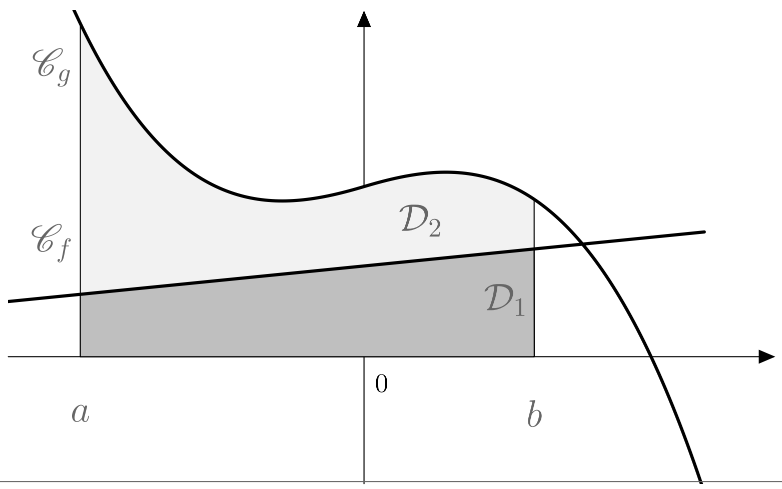
Propriété 16.36 :

On considère deux fonctions f et g continues sur $[a;b]$.
Si, pour tout $x \in [a;b]$, on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Remarque 16.37 :

Graphiquement, on a représenté deux fonctions f et g positives et continues sur un intervalle $[a;b]$.
Dire que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$ revient à dire que l'aire du domaine $\mathcal{D}_1$ (représentant $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ (et hachurée sur le graphique suivant) est plus petite que l'aire du domaine $\mathcal{D}_2$ (représentant $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ (et grisée sur le graphique suivant).



Démonstration 16.38 :

Soient deux fonctions f et g continues sur $[a;b]$ telles que, pour tout $x \in [a;b]$, on a $f(x) \leqslant g(x)$.
Pour tout $x \in [a;b]$, on a :

$$f(x) \leqslant g(x) \iff f(x) - g(x) \leqslant 0.$$

Ainsi, par positivité de l'intégrale, on a :

$$\int_a^b f(x) - g(x)\, dx \leqslant 0.$$

Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) - g(x)\, dx \leqslant 0 &\iff \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx \leqslant 0 \\ &\iff \int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b g(x)\, dx.\end{aligned}$$

□

Exemple 16.39 :

Justifier que $\displaystyle\int_0^1 t^3\, dt \leqslant \int_0^1 t^2\, dt$.

Pour tout $t \in [0;1]$, on a $t^3 \leqslant t^2$., et, par comparaison des intégrales, on a : $\displaystyle\int_0^1 t^3\, dt \leqslant \int_0^1 t^2\, dt$.

Exercice(s) :

Exercice 18 p. 259.

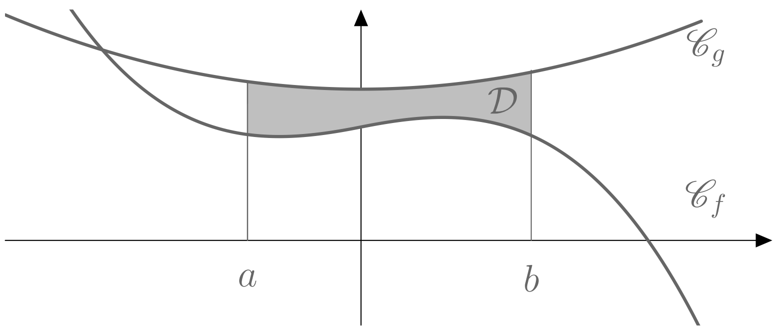
Propriété 16.40 :

Si pour tout $x \in [a;b]$ on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est égale à :

$$\int_a^b g(x) - f(x)\, dx.$$

Remarque 16.41 :

La propriété précédente peut être visualiser à l'aide du graphique suivant :



Ainsi, on a :

$$\mathscr{A}_{\mathcal{D}} = \int_a^b g(x) - f(x)\, dx.$$

Complément(s) :

Vidéo « Calculer l'aire entre deux courbes ».

Complément(s) :

Méthode 2 : « Calculer une aire entre deux courbes ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 40 à 43 p. 261.

4. Valeur moyenne d'une fonction

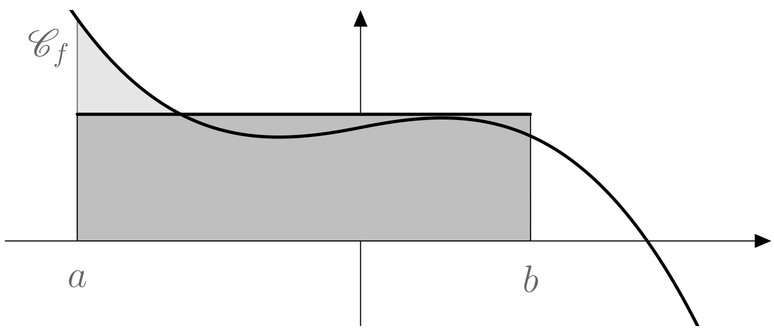
Définition 16.43 : Valeur moyenne d'un intégrale

On considère une fonction f continue sur l'intervalle $[a;b]$ (avec $a<b$).
La valeur moyenne de f sur $[a;b]$, notée $\overline{f}_{[a;b]}$, est le réel :

$$\overline{f}_{[a;b]}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Remarque 16.44 :

Graphiquement, lorsque f est postive sur $[a;b]$, l'égalité ci-dessus signifie que l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre a et b (aire hachurée) est égale à l'aire du rectangle colorié en gris.



La valeur moyenne d'une fonction f sur $[a;b]$ nous fournit une fonction constante sur l'intervalle $[a;b]$ qui a la même aire que l'intégrale de f sur $[a;b]$.

Exemple 16.45 :

Déterminer la valeur moyenne de la fonction exponentielle entre -1 et 1.
On note f la fonction exponentielle et $\overline{f}_{[-1;1]}$, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[-1;1]$.
On a alors :

$$\begin{aligned}\overline{f}_{[-1;1]}&=\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\\&=\frac{1}{2}\left[e^x\right]_{-1}^{1}\\&=\frac{1}{2}\left(e^1-e^{-1}\right).\end{aligned}$$

Complément(s) :

Vidéo « Calculer la valeur moyenne d'une fonction ».

Complément(s) :

Méthode 3 p. 249 : « Calculer la valeur moyenne d'une fonction ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 45 à 48 p. 261.

5. Intégration par parties

Propriété 16.47 : ***Intégration Par Parties***

On considère deux fonctions u et v définies et dérivables sur un intervalle $[a;b]$ telles que u' et v' soient également continues sur l'intervalle $[a;b]$.
On a alors :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.$$

Exemple 16.48 :

Calculer $\displaystyle\int_0^5 x\,e^x\,dx$.
Pour tout $x \in [0;5]$, on pose :

$$\begin{aligned} u(x) &= x \quad \text{et} \quad u'(x) = 1 \\ v(x) &= e^x \quad \text{et} \quad v'(x) = e^x \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^5 x\,e^x\,dx &= \int_0^5 u(x)\,v'(x)\,dx \\ &= \Big[x\,e^x\Big]_0^5 - \int_0^5 e^x\,dx \\ &= 5e^5 - \Big[e^x\Big]_0^5 \\ &= 5e^5 - (e^5 - e^0) \\ &= 4e^5 - 1. \end{aligned}$$

Complément(s) :

Méthode 2 p. 247 « Utiliser une intégration par parties pour calculer une intégrale ».

Complément(s) :

Vidéo « Calculer une intégrale par parties (1) ».

Complément(s) :

Vidéo « Calculer une intégrale par parties (2) ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 29, 30 et 31 p. 260.