Chapitre 1
Nombres complexes : point de vue algébrique

Sommaire

Capacités :	Exercices :	Bilan :				
Effectuer des calculs algébriques dans $\mathbb{C}$						
Résoudre une équation du 1^{er} degré dans $\mathbb{C}$						
Résoudre une équation d'inconnue z et $\bar{z}$						
Résoudre une équation du 2^{nd} degré dans $\mathbb{C}$						
Résoudre une équation se ramenant à du 2^{nd} degré						

Jérôme CARDAN (1501 à 1576) est un mathématicien, médecin, philosophe et astrologue italien.
Il enseigne les mathématiques à Milan puis la médecine à l'université de Pavie.
Après avoir été accusé d'hérésie, il est mis en prison et perd le droit d'enseigner.
Précurseur du calcul des probabilités, il publie, avant FERMAT et PASCAL un ouvrage sur le sujet.
Intéressé par les équations de degré 3 et degré 4, il travaille de concert avec TARTAGLIA et publie en 1545 un ouvrage sur la résolution générale des équations du type $x^3 + px = q$.

Introduction

Activité 1.1 :

1. La méthode de Cardan pour résoudre $(E_1) : x^3 = 6x + 40$.

   Cette méthode publiée par Jérôme Cardan en 1545 avait été élaborée par TARTAGLIA en 1539.

   (a) A l'aide de la calculatrice, vérifier que l'équation (E_1) admet une solution unique.

   (b) On pose $x = u + v$ et on cherche u et v (tels que $u \leq v$) tels que x soit solution de (E_1).

      i. Développer $(u+v)^3$, puis démontrer que $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$.

      ....

      ....

      ....

      ....

      ....

      ....

      ....

      ....

      ....

      ....

      ....

      ....

      ....

      ii. En déduire que si $u^3 + v^3 = 40$ et $3uv = 6$, alors $x = u + v$ est solution de (E_1).

      ....

      ....

      ....

      ....

      ....

      ....

      ....

      ....

Activité 1.1 (suite) :

1. (b) iii. En posant $a = u^3$ et $b = v^3$, montrer que a et b vérifient $a + b = 40$ et $ab = 8$, puis que a et b sont les deux solutions de l'équation $x^2 - 40x + 8 = 0$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

iv. Vérifier que $u = 2 - \sqrt{2}$ et $v = 2 + \sqrt{2}$ conviennent, puis conclure.

....

....

....

....

....

....

2. Equation de BOMBELLI (à l'origine des nombres complexes) : $(E_2) : x^3 = 15x + 4$.

   (a) A l'aide de la calculatrice, vérifier que (E_2) admet exactement trois solutions dont l'une est entière. En posant $f(x) = x^3 - 15x - 4$, vérifier que $f(x) = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$ et en déduire les solutions de (E_2).

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Activité 1.1 (suite) :

2. (b) Avec la méthode de Cardan :

   i. On pose $x = u + v$, $a = u^3$ et $b = v^3$. Montrer que a et b sont les deux solutions de l'équation $(x-2)^2 + 121 = 0$.

   Cette équation admet-elle des solutions dans $\mathbb{R}$?

   ii. Devant l'échec de l'application de la méthode de Cardan à cette équation, BOMBELLI décide de créer imaginaire dont le carré est -121, ce qui revient à créer un nombre dont le carré est -1, noté provisoirement $\sqrt{-1}$.

   Montrer dans ce cas, avec les notations de la question 1., que $a = 2 - 11\sqrt{-1}$ et $b = 2 + 11\sqrt{-1}$.

   iii. En utilisant le fait que $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$ et $\left(\sqrt{-1}\right)^3 = -\sqrt{-1}$, montrer que $u = 2 - \sqrt{-1}$ et $v = 2 + \sqrt{-1}$, puis conclure.

I. L'ensemble des nombres complexes

Définition 1.2 : Ensemble des nombre complexes : $\mathbb{C}$

Il existe un ensemble de nombres tel que :

- ....,
- ....,
- ....,
- ....
  ....

Cet ensemble est appelé « .... ».

Il est noté : ....

Exemple 1.3 :

- $\sqrt{2}$
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
- 3i
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....

Définition 1.4 : Forme algébrique

On considère un nombre complexe z tel que $z = a + ib$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$:

- $a + ib$ est appelé « .... » du nombre complexe z.
- a est appelé « .... » de z et on la note ....
- b est appelé « .... » de z et on la note ....

Définition 1.5 : Ensemble des imaginaires purs

L'ensemble des nombres complexes dont la partie réelle est nulle (i.e. ....)

est appelé « .... » de z et on le note ....

Exemple 1.6 :

Déterminer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

- $z_1 = 3 - 5\mathrm{i}$
- $z_2 = -7\mathrm{i}$

Complément(s) :

Pour déterminer la partie réelle et/ou la partie imaginaire d'un nombre complexe sur Numworks :

- « Boite à outils »
- « Nombres complexes »
- « im(z) » ou « re(z) »

II. Opérations dans $\mathbb{C}$.

Propriété 1.7 : Egalité de deux complexes

On considère deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que :

- $z_1 = a_1 + \mathrm{i}\, b_1$ avec $a_1 \in \mathbb{R}$ et $b_1 \in \mathbb{R}$
- $z_2 = a_2 + \mathrm{i}\, b_2$ avec $a_2 \in \mathbb{R}$ et $b_2 \in \mathbb{R}$

z_1 et z_2 sont égaux si et seulement si ils possèdent ....

et ....

Autrement dit,

.... $\Longleftrightarrow$ ....

Exemple 1.8 :

On considère une nombre complexe z tel que $z = -3x^2 + 5x\,\mathrm{i}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Existe-t'il $x \in \mathbb{R}$ tel que $z = 3 + 5\,\mathrm{i}$?

Propriété 1.9 : Addition de deux complexes

On considère deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que :

- $z_1 = a_1 + \mathrm{i}\, b_1$ avec $a_1 \in \mathbb{R}$ et $b_1 \in \mathbb{R}$
- $z_2 = a_2 + \mathrm{i}\, b_2$ avec $a_2 \in \mathbb{R}$ et $b_2 \in \mathbb{R}$

Alors :

....

Autrement dit,

....

....

Exemple 1.10 :

On considère $z_1 = 2 + 3\,\mathrm{i}$ et $z_2 = 5 - 12\,\mathrm{i}$. Calculer $z_1 + z_2$.

....

....

Propriété 1.11 : Produit de deux complexes

On considère deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que :

- $z_1 = a_1 + \mathrm{i}\, b_1$ avec $a_1 \in \mathbb{R}$ et $b_1 \in \mathbb{R}$
- $z_2 = a_2 + \mathrm{i}\, b_2$ avec $a_2 \in \mathbb{R}$ et $b_2 \in \mathbb{R}$

Alors :

....

Autrement dit,

....

....

Démonstration 1.12 :

On considère deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que :

- $z_1 = a_1 + \mathrm{i}\, b_1$ avec $a_1 \in \mathbb{R}$ et $b_1 \in \mathbb{R}$
- $z_2 = a_2 + \mathrm{i}\, b_2$ avec $a_2 \in \mathbb{R}$ et $b_2 \in \mathbb{R}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exemple 1.13 :

Calculer $\mathscr{R}e\Big((2+5\mathrm{i})(1-i)\Big)$.

Calculer $\mathscr{I}m\Big((1+\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})\Big)$.

Exemple 1.14 :

On considère $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Calculer $(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)$.

Complément(s) :

Exercice Résolu 1 page 11 « Calculer dans $\mathbb{C}$ ».

Complément(s) :

Vidéo « Ecrire un nombre complexe sous sa forme algébrique (1) ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 1, 4, 5 et 6 page 18 et 64 page 22.

Propriété 1.16 :* — *Inverse d'un nombre complexe

On considère $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ (non tous les deux nuls). Alors :

....

Démonstration 1.17 :

On considère $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ (non tous les deux nuls).

On a vu dans l'exemple précédent que ....

Ainsi, on a :

....

....

....

....

....

....

Exemple 1.18 :

Déterminer les formes algébriques des nombres suivants :

- $z_1 = \dfrac{1}{3 + 2\mathrm{i}}$

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

- $z_2 = \dfrac{1}{\mathrm{i}}$

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

Exemple 1.18(suite) :

- $z_3 = \dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

Complément(s) :

Vidéo « Ecrire un nombre complexe sous sa forme algébrique (2) ».

Complément(s) :

Exercice Résolu 2 page 13 : « Quotient dans $\mathbb{C}$ ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 23, 24 et 27 page 19.

Complément(s) :

Exercice Résolu 2 page 13 : « Résoudre des équations du 1$^{\text{er}}$ degré ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 30 page 20 et 67 page 22.

III. Le conjugué d'un nombre complexe

Définition 1.20 : ***le conjugué d'un complexe***

On considère un nombre complexe z tel que $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

On appelle ...., le nombre noté ....tel que :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 1.21 :

Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants :

- $z_1 = 3 + \mathrm{i}$
- $z_2 = -9$
- $z_3 = -\dfrac{1}{3}\mathrm{i}$

....

....

Complément(s) :

Pour calculer le conjugué d'un nombre complexe sur Numworks :

- « Boite à outils »
- « Nombres complexes »
- « conj(z) »

Complément(s) :

Vidéo « Déterminer le conjugué d'un nombre complexe ».

✎ Exercice(s) :

Exercices 14, 17, 18 page 19 et 61 page 22.

Méthodologie 1.23 : Résoudre une équation avec z et $\overline{z}$

Pour résoudre une équation faisant intervenir une inconnue complexe z et son conjugué $\overline{z}$, on utilise la méthode suivante :

1. On pose $z = a + ib$ et donc on a $\overline{z} = a - ib$ et on remplace dans l'équation z et $\overline{z}$ par leur expression précédente.
2. On regroupe partie imaginaire et partie réelle dans les deux membres de l'équations.
3. On identifie parties réelles et parties imaginaires : on obtient alors un système de deux équations à deux inconnues a et b.
4. On résout le système précédent et on trouve a et b.

Exemple 1.24 :

Résoudre $(3+\mathrm{i})z - \mathrm{i}\overline{z} = 2 - 5\mathrm{i}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Complément(s) :

Exercice Résolu 3 page 13 : « Résoudre des équations faisant intervenir une inconnue et son conjugué »

Complément(s) :

Vidéo « Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$ avec nombre conjugué ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 34, 36 et 37 page 20.

Propriété 1.26 : ***Somme et Produit des conjugués***

On considère deux nombres complexes z_1 et z_2.

- . . . .
- . . . .

Démonstration 1.27 :

Soient z_1 et z_2 deux complexes tels que :

- . . . .
. . . .
- . . . .
. . . .

Démonstration 1.27 (suite) :

On a alors :

- ....
....
....
....
....
....
....
....
- ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Propriété 1.28 : Quotient et Puissance des conjugués

D'après la propriété précédente, on en déduit les propriétés suivantes :

- Si $z \in \mathbb{C}$, alors :
  ....
- Si $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors :
  ....
- Si $z \in \mathbb{C}^*$ alors :
  ....
- Si $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}^*$, alors :
  ....
- Si $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors :
  ....

Démonstration 1.29 :

- On a :

  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....

- On le démontre par récurrence :
  - Initialisation :

    ....
    ....
    ....
    ....
    ....
    ....

  - Hérédité : :

    ....
    ....
    ....
    ....
    ....
    ....
    ....
    ....
    ....
    ....
    ....
    ....

  - Conclusion : :

  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....

- On a :

  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....

- On a : :

  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....

- (voir un exemple précédent)

Complément(s) :

Exercice Résolu 2 page 11 : « Utiliser le conjugué ».

✎ *Exercice(s) :*

Exercice 40 page 20 (uniquement la question 1).

Propriété 1.30 :

On considère un nombre complexe z tel que $z = a + \mathrm{i}\, b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

- ....
- ....

  C'est-à-dire :

  ....
- .... $\Longleftrightarrow$ .... $\Longleftrightarrow$ ....

- .... $\Longleftrightarrow$ ....
- ....

  C'est-à-dire :

  ....
- .... $\Longleftrightarrow$ .... $\Longleftrightarrow$ ....

Méthodologie 1.31 : ***Montrer qu'un complexe est réel***

....

....

....

Exemple 1.32 :

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (1+i)^n + (1-i)^n$ est un nombre réel.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Méthodologie 1.33 : ***Montrer qu'un complexe est imaginaire pure***

. . . .

. . . .

. . . .

Exemple 1.34 :

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (1+i)^n - (1-i)^n$ est un imaginaire pure.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Complément(s) :

Exercice Résolu 1 page 13 : « Caractériser les nombres réels et imaginaires purs ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 40 (question 2), 41 et 43 page 20.

IV. Résolution d'une équation du Second Degré

Théorème 1.35 : Résolution des équations du 2^nd degré

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b;c) \in \mathbb{R}^2$ et Δ le discriminant de cette équation.

- ....
  ....
  ....
  ....
- ....
  ....
  ....
- ....
  ....
  ....
  ....

Exemple 1.36 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- $z^2 + z + 1 = 0$

  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....

Exemple 1.36(suite) :

- $z^2 + z + 1 = 0$

  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....

- $z^2 - 3z + 4 = 0$

  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....

Remarque 1.37 :

....
....
....

Complément(s) :

Exercice Résolu 1 page 77 : « Résoudre une équation du 2^{nd} degré dans $\mathbb{C}$ ».

Exercice Résolu 2 page 77 : « Résoudre une équation se ramenant à une équation du 2^{nd} degré dans $\mathbb{C}$ ».

Complément(s) :

Vidéo « Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 1, 2, 3 et 11 page 84.