Chapitre 1
Rappels sur les suites & Récurrence

Sommaire

Capacités :	**Exercices :**	Non Acquis	Acquis
Etudier une suite arithmétique	Fiche d'exercices		
Etudier une suite géométrique	Fiche d'exercices		
Mener un raisonnement par récurrence	9 et 11 p. 27 Fiche d'exercices		
Etudier les variations d'une suite	23 et 24 p. 28		
Démontrer qu'une suite est minorée, majorée ou bornée	25, 26 et 28 p. 28		

Leonardo FIBONACCI (1180 à 1250) de son vrai nom Leonado DA PISA est un mathématicien qui a parcouru plusieurs pays méditéranéens (Sicile, Grèce, Syrie et Egypte). Il apprend les mathémtiques grecques et arabes. Il est notamment convaincu par la supériorité du système d'écriture des nombres avec les chiffres arabes. Son oeuvre est fondamentale puisqu'il permit d'établir un lien entre les mathématiques arabes et celles de La Renaissance. Il a notamment permis l'introduction des nombres arabes en Occident.
La suite de FIBONACCI répond au problème suivant :

> Partant d'un couple de lapins, combien en obtiendra-t-on après un nombre donné de mois, sachant que chaque couple se produit chaque mois un nouveau couple, qui lui même deviendra productif après deux mois ?

I. Les Suites Arithmétiques

Définition 1.1 : ***Suite arithmétique***

Une suite $(u_n)_{n\in I}$ est dite arithmétique lorsqu'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même constante r.

$$u_0 \xrightarrow{+\text{ r}} u_1 \xrightarrow{+\text{ r}} u_2 \quad \ldots. \quad u_n \xrightarrow{+\text{ r}} u_{n+1}$$

r est appelé la raison arithmétique de la suite $(u_n)_{n\in I}$.
Le terme général d'une telle suite est donnée par :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple 1.2 :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_{n+1} = u_n + 2$ est une suite arithmétique de raison $r = 2$.

Méthodologie 1.3 : ***Montrer qu'une suite est arithmétique***

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on montrera que $u_{n+1} - u_n$ est contant (ne dépend pas de n).

Exemple 1.4 :

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in N$ par $u_n = 5n - 3$ est une suite arithmétique.

Propriété 1.5 :

Le sens de variation d'une suite arithmétique de raison r est donné par le signe de la raison :

1. Si $r > 0$, la suite est alors croissante.
2. Si $r < 0$, la suite est alors décroissante.
3. Si $r = 0$, la suite est alors stationnaire.

Démonstration 1.6 :

On considère une suite (u_n) arithmétique de raison r, c 'est-à-dire $u_{n+1} = u_n + r$. Donc $u_{n+1} - u_n = r$.
Donc on distingue 3 cas :

1. Si $r > 0$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$ donc $u_{n+1} > u_n$ et la suite (u_n) est croissante.
2. Si $r = 0$, alors $u_{n+1} - u_n = 0$ donc $u_{n+1} = u_n$ et la suite (u_n) est constante (stationnaire).
3. Si $r < 0$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$ donc $u_{n+1} < u_n$ et la suite (u_n) est décroissante. □

Exemple 1.7 :

Donner le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = u_n - 15$ et $u_0 = 250$.

Propriété 1.8 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de raison r. Pour tout entier n, on a :

$$u_n = u_0 + nr$$

Exemple 1.9 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de raison $r = 500$ avec $u_0 = 10\ 000$.
Calculer u_{25}.

Propriété 1.10 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de raison r. Pour tous entiers n et p, on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Exemple 1.11 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique de raison $r = 500$ avec $u_10 = 15\ 000$.
Calculer u_{26}.

Propriété 1.12 :

Les points représentant une suite arithmétique sont alignés.

Théorème 1.13 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Remarque 1.14 :

On peut aussi écrire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration 1.15 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 1 + 2 + \ldots + n$. On écrit S_n de deux manières différentes :

$$\begin{array}{rcccccc} S_n = & 1+ & 2+ & \ldots+ & n-1+ & n \\ S_n = & n+ & n-1+ & \ldots+ & 2+ & 1 \\ 2S_n = & n+1+ & n+1+ & \ldots+ & n+1+ & n+1 \end{array}$$

Ainsi on a $2S_n = n(n+1)$ et donc $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ □

Exemple 1.16 :

Calculer $\sum_{k=1}^{23} k$.

Théorème 1.17 :

On considère une suite (u_n) une suite arithmétique de raison r. Soit $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Exemple 1.18 :

On considère la suite (w_n) définie par $w_n = n + 2$.

Après avoir justifier que la suite est arithmétique et préciser sa raison, calculer $\sum_{k=1}^{10} w_k$.

II. Les Suites Géométriques

Définition 1.19 : ***Suite Géométrique***

Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est dite géométrique lorsqu'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même constante q.

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \quad .... \quad u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}$$

q est appelé la raison géométrique de la suite $(u_n)_{n \in I}$.
Le terme général d'une telle suite est donnée par :

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Exemple 1.20 :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_{n+1} = 2u_n$ est une suite géométrique de raison $q = 2$.

Exemple 1.21 :

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_n = 7 \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

Propriété 1.22 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ géométrique de raison q. Pour tout entier n, on a :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple 1.23 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison $q = 1,035$ avec $u_0 = 10\ 000$.
Calculer u_{25}.

Propriété 1.24 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison q et soit u_0 son premier terme. Alors :

1. Si $q > 1$ alors on distingue deux sous cas :
   (a) Si $u_0 > 0$, la suite (u_n) est alors croissante.
   (b) Si $u_0 < 0$, la suite (u_n) est alors décroissante.
2. Si $q = 1$, la suite est alors constante.
3. Si $0 < q < 1$ alors on distingue deux sous cas :
   (a) Si $u_0 < 0$, la suite (u_n) est alors croissante.
   (b) Si $u_0 > 0$, la suite (u_n) est alors décroissante.
4. Si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

Démonstration 1.25 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison q et soit u_0 son premier terme.
On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 \times q^n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 q^{n+1} - u_0 q^n \\ &= u_0 q^n (q-1) \end{aligned}$$

Les résultats de la propriété précédente résultent donc dans l'étude du signe de la dernière égalité. □

Exemple 1.26 :

Donner le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \dfrac{\pi}{3} u_n$ et $u_0 = 3$.

Propriété 1.27 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison q. Pour tous entiers n et p, on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exemple 1.28 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison $q = 1,035$ avec $u_{10} = 14\ 106$.
Calculer u_{26}.

Propriété 1.29 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison q. Alors :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration 1.30 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison q.
On pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
En utilisant la propriété précédente, $u_n = u_0 \times q^n$, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= & u_0 + && u_1 + && \ldots + && u_n \\ &= & u_0 + && u_0 \times q + && \ldots + && u_0 \times q^n \\ &= u_0\left(1 + q + \ldots + q^n\right) \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$q \times S_n = u_0\left(q + q^2 + \ldots + q^{n+1}\right)$$

Donc, en utilisant les deux dernières égalités :

$$\begin{aligned} S_n - qS_n &= u_0\left(1 - q^n\right) \\ S_n(1-q) &= u_0\left(1 - q^{n+1}\right) \\ S_n &= u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \end{aligned}$$

□

Complément(s) :

Lire la vidéo « Utiliser le symbole de somme Σ ».

Exemple 1.32 :

Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{8} 2^i$.

Propriété 1.33 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de terme général q^n. Alors :

1. Si $q > 1$, alors la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. Si $q = 1$, la suite (u_n) reste constante à 1.
3. Si $-1 < q < 1$, alors la suite (u_n) converge vers 0.
4. Si $q \leq 1$, alors la suite (u_n) n'a pas de limite.

Complément(s) :

Lire la vidéo « Calculer la somme des termes d'une suite (Algorithme) ».

III. Le Raisonnement Par Récurrence

Propriété 1.35 :

On considère une propriété P_n dépendant d'un entier naturel n. Si P_n vérifie les conditions suivantes :

1. P_{n_0} est vraie pour un certain n_0 (initialisation)
2. Si on suppose que si P_k est vraie alors P_{k+1} est vraie (pour $k \geq n_0$) (hérédité)

Alors on peut affirmer que la propriété P_n est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarque 1.36 :

La propriété P_n peut être de différentes natures : une égalité, une inégalité, une phrase.

Remarque 1.37 :

Dans l'hérédité, l'hypothèse de récurrence doit **absolument** intervenir.

Complément(s) :

Lire la vidéo « Apprendre à effectuer une démonstration par récurrence ».

Méthodologie 1.39 : ***Un modèle de rédaction***

Soit $\mathcal{P}$ la propriété définie pour tout $n \in \ldots\ldots\ldots$ par :

$$\mathcal{P}_n : \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Initialisation : Montrons que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie au rang .... :
Comme .... alors la propriété est vraie au rang ....
Hérédité : on considère $n \geq \ldots\ldots$ et on suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire ....
On veut alors démontrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire ....

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
La propriété est donc héréditaire à partir du rang ....
Conclusion : La propriété est vraie au rang ...... et est héréditaire à partir de ce rang, donc pour tout $n \in$ ......, on a ....

Exemple 1.40 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2$.

Complément(s) :

Lire la méthode 3 p. 15 du manuel : « Mettre en œuvre un raisonnement par récurrence ».

✎ ***Exercice(s) :***

Faire la fiche d'exercices « Le Principe de Récurrence ».

✎ ***Exercice(s) :***

Faire les exercices 9 et 11 p. 27

Complément(s) :

Lire la vidéo « Démontrer par récurrence l'expression d'une suite ».

IV. Monotonie des Suites

Définition 1.42 : — ***Suite croissante, décroissante et constante***

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante lorsque pour tout $n \in I$, on a :
$$u_{n+1} \leq u_n$$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante lorsque pour tout $n \in I$, on a :
$$u_n \leq u_{n+1}$$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est constante lorsque pour tout $n \in I$, on a :
$$u_n = u_{n+1}$$

Remarque 1.43 :

Dans la pratique, pour montrer les variations d'une suite $(u_n)_{n\in I}$, on peut :

1. Si la suite s'écrit de manière fonctionnelle (du type $u_n = f(n)$), alors on peut étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
2. On peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
3. Lorsque tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in I}$ sont du même signe on peut comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
4. On peut démontrer l'inégalité par un raisonnement par récurrence.

Exemple 1.44 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$. On considère la suite (u_n) définit par $u_n = f(n)$.
Etudier les variations de la suite (u_n).

Exemple 1.45 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \cos(n^2) - 2n$.
Etudier les variations de la suite (u_n).

Exemple 1.46 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$, où $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$.
Etudier la monotonie de la suite (u_n).

Complément(s) :

Lire la méthode 1 p. 17 du manuel : « Déterminer le sens de variations d'une suite ».

Complément(s) :

Lire la vidéo « Démontrer par récurrence la monotonie d'une suite ».

✎ ***Exercice(s) :***

Faire les exercices 23 et 24 p. 28

V. Suites Bornées

Définition 1.47 : ***Suite minorée, majorée et bornée***

On considère une suite (u_n).

- La suite (u_n) est majorée si il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
- La suite (u_n) est minorée si il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
- La suite (u_n) est bornée si elle est minorée et majorée.

Exemple 1.48 :

Démontrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n+1}{3n+1}$ est bornée.

Exemple 1.49 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 3$.

Propriété 1.50 :

On considère une suite (u_n).

$$(u_n) \text{ est bornée} \iff \text{il existe } M > 0 \text{ tel que, pour tout } n \in \mathbb{N},\ |u_n| < M.$$

Complément(s) :

Lire la méthode 2 p. 17 du manuel : « Montrer qu'une suite est majorée ou minorée ».

✎ ***Exercice(s) :***

Faire les exercices 25, 26 et 28 p. 28

Complément(s) :

Lire la vidéo « Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée ».