Chapitre 5
Variables aléatoires et Loi Binomiale

Sommaire

I. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

1. Définir une loi de probabilité

Définition 5.1 : ***Variable aléatoire***

. . . .

. . . .

. . . .

Exemple 5.2 :

Si on lance un dé cubique, on gagne 1€ si le nombre obtenu est paire, et 3 € sinon.

On note X la variable aléatoire associée au gain de cette expérience.

Quelles valeurs prendra la variable aléatoire X ?

. . . .

. . . .

Remarque 5.3 :

Lorsque k désigne un nombre réel, l'événement "X prend la valeur k" est noté . . . .

Définition 5.4 : Loi de probabilité

Définir la loi de probabilité de la variable aléatoire X, c'est associer à chaque valeur x_i prise par X la probabilité $P(X = x_i)$.

On résume cette loi de probabilité par un tableau :

			...	
			...	

Exemple 5.5 :

On lance deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

A l'aide d'un tableau à double entrée, on va déterminer la loi de probabilité de la variable X associée à la somme des deux dés.

On utilise le tableau à double entrée suivant qui liste toutes les possibilités de la somme des deux dés :

Chaque case non grisée du tableau à double entrée a la même probabilité de se produire.

La variable aléatoire X est donc à valeur dans :

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

$\{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$.

La loi de probabilité de la variable X est donc donnée par :

x_i											
$P(X = x_i)$											

Définition 5.6 : Espérance

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est la suivante :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

L'espérance de X est ....

Complément(s) :

Exercice résolu 3 p. 155 « Calculer une espérance ».

Complément(s) :

Lire la vidéo « Calculer l'espérance d'une variable aléatoire ».

Exemple 5.8 :

On lance deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On considère la variable X associée à la somme des deux dés dont on donne la loi de probabilité :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Déterminer l'espérance de X.

....

....

....

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 3, 15, 16, 18 et 20 p. 160 à 163.

II. La loi binomiale

1. La loi de Bernoulli

Définition 5.9 : ***Epreuve de Bernoulli***

Une épreuve de Bernoulli est une expérience ayant deux issues :

- ....
  ....
  ....
- ....
  ....
  ....

On résume une telle expérience par l'arbre pondéré suivant :

Définition 5.10 : Loi de Bernoulli

On considère une expérience de Bernoulli.

....

....

....

....

....

On donne la loi de probabilité de X dans le tableau ci-dessous :

x_i		
$P(X = x_i)$		

Exemple 5.11 :

On lance une pièce de monnaie équilibrée et on considère comme succès, le fait d'obtenir la face « Pile » de la pièce.

Décrire l'arbre pondéré associé à cette expérience de Bernoulli.

....

....

....

....

....

....

Soit X la variable aléatoire associée à cette expérience de Bernoulli. Préciser son paramètre p et donner sa loi de probabilité.

....

....

....

....

....

Propriété 5.12 : Espérance d'une loi de Bernoulli

L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètre p est $\mathbb{E}(X) =$..........

Exemple 5.13 :

On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,4$.

Déterminer l'espérance de X.

....

....

2. Définition de la loi binomiale

Définition 5.14 : ***Schéma de Bernoulli***

. . . .

. . . .

. . . .

Définition 5.15 : ***Loi binomiale***

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Exemple 5.16 :

On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 trois fois de suite.

On note X la variable aléatoire associée au nombre de fois ou l'on obtient une face qui est multiple de 3.

Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Complément(s) :

Exercice résolu 1 p. 155 « Reconnaitre une loi binomiale ».

Complément(s) :

Exercice résolu 2 p. 155 « Calculer une probabilité avec une loi binomiale ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 5, 21, 23 et 25 p. 160 à 164.

3. Coefficient binomial et loi binomiale

Définition 5.17 : ***Coefficient binomial***

On considère un arbre pondéré associé à un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

....

....

....

....

Exemple 5.18 :

On considère un arbre pondéré associé à un schéma de Bernoulli de paramètres p et $n = 3$.

Représenter l'arbre pondéré associé à ce schéma de Bernoulli.

- $\binom{3}{0}$ représente ....
  ....
  ....
  ....
  Il y a .. .. chemin(s) amenant à .. .. succès sur ces 3 épreuves donc $\binom{3}{0} =$ ....
- $\binom{3}{1}$ représente ....
  ....
  ....
  ....
  Il y a .. .. chemin(s) amenant à .. .. succès sur ces 3 épreuves donc $\binom{3}{1} =$ ....
- $\binom{3}{2} =$ ....
- $\binom{3}{2} =$ ....

Remarque 5.19 :

On peut donner deux valeurs particulières des coefficients binomiaux :

- $\binom{n}{0}$ = ...
....
....
- $\binom{n}{n}$ = ...
....
....

Exercice(s) :

Exercice 27 p. 164.

Propriété 5.20 : ***Formule de Pascal***

On considère n un entier non nul et k un entier.

Formule de Pascal : si $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a :

Remarque 5.21 :

Pour déterminer les coefficients binomiaux, on peut utiliser le « Triangle de Pascal ».

Pour cela, on utilise un tableau à double entrée, dans lequel :

- chaque colonne représente une valeur de k ;
- chaque ligne représente une valeur de n .

D'abord, on complète le tableau avec les coefficients binomiaux $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$.

Ensuite, on utilise ensuite la propriété :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

On additionne les valeurs de deux cases situées sur une même ligne et on trouve la valeur de la case juste au-dessous de la seconde case additionnée. On résume ce procédé par ce qui suit :

	$\dots$	k	$k+1$
$\vdots$			
n	$\dots$	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1}$
$n+1$	$\dots$		$\binom{n+1}{k+1}$

Remarque 5.21 (suite) :

On obtient alors le tableau suivant pour les premières valeurs de n et k inférieures à 5 :

	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

Complément(s) :

Exercice résolu 2 p. 157 « calculer des coefficients binomiaux avec le triangle de Pascal ».

Complément(s) :

Lire la vidéo « calculer un coefficient binomial avec le triangle de Pascal ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 12 et 36 p. 161 à 166

Propriété 5.23 : — Loi binomiale

On considère une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.

Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, on a : $P(X = k) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Complément(s) :

Exercice résolu 1 p. 157 « calculer une probabilité à l'aide des coefficients binomiaux ».

Complément(s) :

Exercice résolu 3 p. 157 « calculer une probabilité à l'aide des coefficients binomiaux ».

Complément(s) :

Lire la vidéo « Calculer une probabilité d'une loi binomiale ».

Exemple 5.25 :

Déterminer la loi de probabilité d'une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,4$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 29, 30 et 34 p. 164 à 166.

4. Espérance de la loi binomiale

Propriété 5.26 : ***Espérance d'une loi binomiale***

Si la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$, alors : $\mathbb{E}(X) =$ ....

Exemple 5.27 :

On considère la variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,4$.

Calculer l'espérance de X.

....

....

Complément(s) :

Lire la vidéo « Calculer l'espérance d'une loi binomiale ».

Complément(s) :

Lire la vidéo « Cours sur la loi binomiale ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice bilan 49 p. 175