NOM : .... Prénom : ....

Exercice 1 : *(4 points)*

Cet exercice est un QCM.
Pour chacune des 4 questions, 4 propositions sont données dont **une seule** est correcte.
Entourer sur l'énoncé la réponse de votre choix. En cas de mauvaise réponse, aucun point n'est enlevé.

1. La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 50$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

   (a) $u_n = 50 \times (-2)^n$ (b) $u_n = 50 + \dfrac{-2}{n}$ (c) $u_n = 50 - 2n$ (d) $u_n = 50 \times 2^n$

2. Si (v_n) est une suite arithmétique de raison 4 vérifiant $v_0 = 5$, alors on a $v_0 + v_1 + ... + v_{10} = ...$:

   (a) 250 (b) 275 (c) 6 990 505 (d) 1 747 625

3. Si (w_n) est une suite géométrique de raison 4, vérifiant $w_0 = 5$, alors on a $w_0 + w_1 + ... + w_{10} = ...$:

   (a) 250 (b) 275 (c) 6 990 505 (d) 1 747 625

4. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 4x^2 + 1$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(u \circ u)(x) = ...$:

   (a) $4x^4 + 1$ (b) $16x^4 + 5$ (c) $64x^4 + 5$ (d) $64x^4 + 32x^2 + 5$

Exercice 2 : *(6 points)*

1. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}\left(3x^2 + 5\right).$$

   (a) Démontrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{15x^2 + 5}{2\sqrt{x}}.$$

   (b) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{3x^2+7x+5}.$$

   (a) Décomposer la fonction g en deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = (v \circ u)(x)$.

   (b) En déduire la fonction dérivée de la fonction g, notée g'.

3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par :

$$h(x) = \left(3x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^3.$$

   Déterminer la dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, notée h'.

Exercice 3 : *(6 points)*

On considère la suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = 1,015\, u_n - 300 \qquad \text{et} \qquad u_0 = 5700.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

```
u ⟵ 5700
Pour i allant de 1 à 5 faire :
    | u ⟵ 1,015 × u − 300
Fin Pour
```

   (a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en arrondissant les résultats à 1 près.

i	X	1	...
u	5700		...

   (b) Quelle valeur contient la variable u à la fin de cet algorithme ?

2. Démontrer, par récurrence, que la suite (u_n) est décroissante.
3. Démontrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n.$$

Exercice 4 : *(7 points)*

Le but de cet exercice est de déterminer le bénéfice maximum réalisable pour la vente d'un produit « alpha » fabriqué par l'entreprise de la Team Rocket. Toute l'étude porte sur un mois complet de production.
On note q la quantité exprimée en tonnes.
Le coût marginal de fabrication du produit « alpha » par l'entreprise est modélisé par la fonction C_m définie sur l'intervalle $[1\ ;\ 20]$ par :

$$C_m(q) = 4 + \left(0,2q^2 - 2q\right)\, e^{-0,2q}.$$

1. La fonction coût total est modélisée par la fonction C_T définie sur l'intervalle $[1\ ;\ 20]$ par :

$$C_T(q) = 4q - q^2\, e^{-0,2q}.$$

   Vérifier que cette fonction C_m est la dérivée de la fonction C_T sur l'intervalle $[1\ ;\ 20]$.

2. La fonction coût moyen, notée C_M, est la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ 20]$ par :

$$C_M(q) = \frac{C_T(q)}{q}.$$

   (a) Vérifier que $C_M(q) = 4 - q\, e^{-0,2q}$.

   (b) Déterminer la fonction dérivée C'_M de la fonction C_M.

   (c) Pour quelle production mensuelle q_0 (exprimée en tonnes) l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal ?
   Quel est ce coût ? Pour cette production q_0, quelle est la valeur du coût marginal ?

3. On suppose que l'entreprise vend toute sa production mensuelle.
   Chaque tonne du produit « alpha » est vendu 4 000 euros.
   On désigne par $R(q)$ la recette mensuelle obtenue pour la vente de q tonnes du produit « alpha » et par $B(q)$ le bénéfice mensuel en millier d'euros ainsi réalisé.
   En précisant votre démarche, le bénéfice maximal que l'on peut espérer sur le mois étudié.