Exercice 1 : *(12 points)*

Une usine est dotée d'un système d'alarme qui se déclenche en principe lorsqu'un incident se produit sur une chaine de production. Il peut arriver toute fois que le système soit mis en défaut.
Des études ont montré que, sur une journée :

— en l'absence de tout incident, l'alarme se déclenche avec une probabilité de $\dfrac{1}{50}$;

— la probabilité qu'un incident survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à $\dfrac{1}{500}$;

— la probabilité qu'un incident se produise est égale à $\dfrac{1}{100}$.

On pourra noter :

— A l'événement : « L'alarme se déclenche » ;

— I l'événement : « Un incident se produit ».

Toutes les probabilités demandées devront être exprimées sous la forme de fractions irréductibles.

1. Démontrer que la probabilité que l'alarme se déclenche sachant qu'un incident s'est produit est $\dfrac{4}{5}$.
2. Calculer la probabilité que, dans une journée, un incident survienne et que l'alarme se déclenche.
3. Démontrer que la probabilité que, sur une journée, l'alarme se déclenche est $\dfrac{139}{5\,000}$.
4. Quelle est la probabilité que, sur une journée, le système soit mis en défaut ?
5. Un jour, l'alarme vient de se déclencher. Quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un incident ?

Exercice 2 : *(8 points)*

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point !!

1. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + (n+1)(n+2) \qquad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

Affirmation 1 : Pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} + 2e^{-x}.$$

Affirmation 2 : La fonction f possède un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint pour $x = 0$.

3. Soient A et B deux événements indépendants.

Affirmation 3 : Les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

4. Soit f est une fonction continue sur $[0;1]$ telle que, pour tout $x \in [0;1]$, on a :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

Affirmation 4 : L'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur $[0;1]$.