

Chapitre 10

Variables aléatoires

Sommaire

I. Loi de probabilité d'une variable aléatoire	1
II. Indicateurs de la loi de probabilité	3

I. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 10.1 : ————— *Variable aléatoire* —————

.....

.....

.....

Exemple 10.2 : —————

Si on lance un dé cubique, on gagne 1€ si le nombre obtenu est paire, et 3 € sinon.

On note X la variable aléatoire associé au gain de cette expérience.

.....

.....

.....

.....

Remarque 10.3 : —————

Lorsque k désigne un nombre réel, l'événement " X prend la valeur x_i " est noté

Définition 10.4 : ————— *Loi de probabilité* —————

.....

On résume cette loi de probabilité par un tableau :

			...	
			...	

Remarque 10.5 : —————

On rappelle qu'une probabilité p est toujours comprise entre : $\leq p \leq$

De plus, on a $\sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \dots$

Exemple 10.6 : —————

On lance deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

A l'aide d'un tableau à double entrée, on va déterminer la loi de probabilité de la variable X associée à la somme des deux dés.

Chaque case non grisée du tableau à double entrée a la même probabilité de se produire.

La variable aléatoire X est donc à valeur dans :

.....

On utilise le tableau à double entrée suivant qui liste toutes les possibilités de la somme des deux dés :

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

La loi de probabilité de la variable X est donc donnée par :

x_i										
$P(X = x_i)$										

Complément(s) :

Vidéo « Déterminer une loi de probabilité (1) »

**Complément(s) :**

Savoir-Faire 1 p. 320 « Déterminer une loi de probabilité ».

Complément(s) :

Vidéo « Calculer une probabilité avec une variable aléatoire (1) »

**Exercice(s) :**

Exercices 6, 7, 37, 38, 43, 44 p. 320 à 329.

II. Indicateurs de la loi de probabilité

Définition 10.7 : ————— **Espérance** —————On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est la suivante :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

L'espérance de X , notée, est :.....
.....**Complément(s) :**

Vidéo « Calculer une espérance »

**Définition 10.8 :** ————— **Variance** —————On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est la suivante :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

La variance de X , notée, est :.....
.....
.....

Remarque 10.9 :

On note aussi

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \mathbb{E}(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Cette dernière formule, appelée $\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (\mathbb{E}(X))^2$ sera démontrée dans l'exercice 4 de ce chapitre.

Définition 10.10 : *Ecart type*

L'écart-type, noté σ , est donné par :

$$\sigma = \dots\dots\dots$$

Exemple 10.11 :

On lance deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On considère la variable X associée à la somme des deux dés.

On a donné précédemment la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Complément(s) :

Vidéo « Calculer une variance et un écart-type »



Complément(s) :

Savoir-Faire 3 p. 322 « Calculer des indicateurs ».

Exercice(s) :

Exercices 50 à 53 et 55 p. 330

Propriété 10.12 : ——— *Linéarité de l'espérance et l'écart-type* ———On considère a et b deux nombres réels et X une variable aléatoire.

$$\mathbb{E}(aX + b) = \dots\dots\dots$$

$$\mathbb{V}(aX + b) = \dots\dots\dots$$

Exemple 10.13 :

On lance deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On considère la variable X associée à la somme des deux dés.On a donné précédemment, la loi de probabilité de la variable X :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

On s'intéresse alors à la variable aléatoire Y associée au triple de la somme des deux dés.Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de Y .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Complément(s) :Vidéo « Calculer une espérance et une variance avec $Y=aX+b$ »**Exercice(s) :**

Exercice 9 p. 322.

Exercice(s) :

Exercices bilan 89 et 98 p. 338