Chapitre 7
Dérivation : applications

Sommaire

Capacités :	**Exercices :**	**Bilan :**				
Etudier les variations d'une fonction						
Déterminer les extremas d'une fonction						
Résoudre des problème d'optimisation						

Leonhard EULER (Bale 1707 à St Pétersbourg 1783) est un génie des mathématiques qui traite, dans son ouvrage *Introduction complète à l'algèbre*, de tous les domaines : la théorie des nombres, le calcul des probabilités, le calcul différentiel, la géométrie, l'analyse. C'est le premier mathématicien à définir clairement une fonction comme une expression dépendant d'une variable. Il introduit aussi des symboles nouveaux : la notation π pour la circonférence d'un cercle, les notations cos, sin, ...

I. Variations d'une fonction

1. Signe de la dérivée d'une fonction monotone

Théorème 7.1 :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et soit f' sa fonction dérivée, alors :

- ....
- ....
- ....

2. Principe de Lagrange

Théorème 7.2 : ***Théorème de Lagrange***

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable sur cet intervalle alors :

- ....
  ....
  ....
- ....
  ....
  ....
- ....

Méthode 7.3 : ***Etudier les variations d'une fonction***

Pour étudier une fonction f sur un intervalle I, on procède de la manière suivante :

1. ....
   ....
2. ....
3. ....

Exemple 7.4 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2$.

Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Complément(s) :

Savoir-Faire 1 p. 142 « Etudier les variations d'une fonction à l'aide de sa dérivée ».

Complément(s) :

Vidéo « Etudier les variations d'une fonction »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 8, 9 p. 142, 35 et 36 p. 148

II. Extrema d'une fonction

Définition 7.5 : ***Extremum d'une fonction***

....

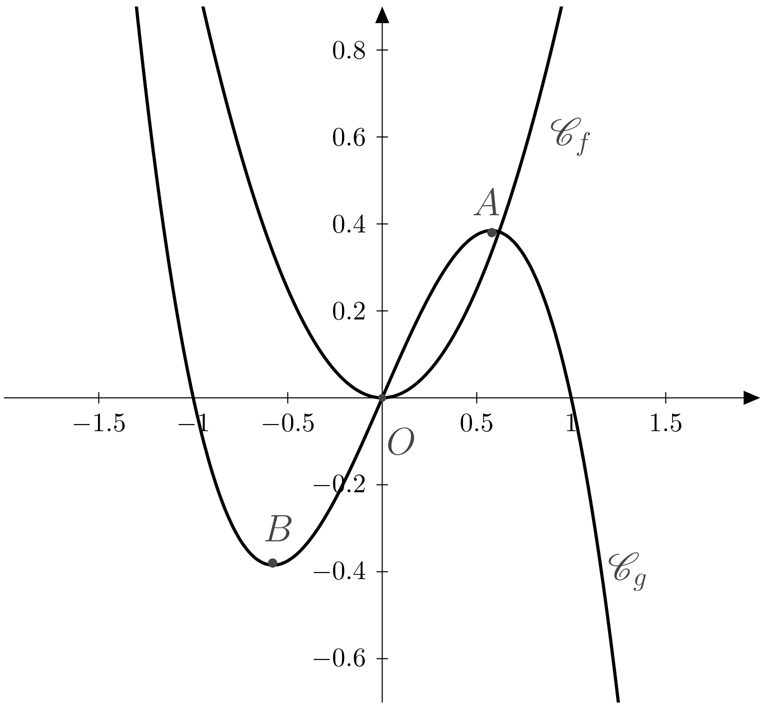
....

Définition 7.6 : ***Extremum local et global***

On distingue deux cas d'extrema :

- **Les extrema absolus** (ou **globaux**).
  - ....
    ....
  - ....
    ....
- **Les extrema locaux.**
  - ....
    ....
    ....
    ....
  - ....
    ....
    ....
    ....

Exemple 7.7 :



- ....
....
....
....
....
....
....
- ....
....
....
....
....
....
....

Propriété 7.8 : Condition nécessaire pour un extremum local

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I ouvert.

....

....

Remarque 7.9 :

Cette condition est dite nécessaire : ....

....

....

....

Prenons pour exemple la fonction la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

....

....

....

....

....

....

....

Remarque 7.10 :

Graphiquement, ...

....

Propriété 7.11 :

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I ouvert et soit a dans I.

....

....

Remarque 7.12 :

Cette condition est dite suffisante : ....

....

....

Exemple 7.13 :

Déterminer le minimum et le maximum de la fonction k définie sur $[-1;3]$ par :

$$k(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1.$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exemple 7.13(suite) :

Complément(s) :

Vidéo « Déterminer l'extremum d'une fonction »

Complément(s) :

Vidéo « Établir une inégalité à l'aide des variations d'une fonction »

Complément(s) :

Savoir-Faire 2 p. 143 « Rechercher un extremum ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 11 p. 143, 47 et 48 p. 150.

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices bilan : 74 et 76 p. 156