NOM : .... Prénom : ....

L'usage de la calculatrice est autorisé.
Les exercices 1 et 2 sont à traiter sur deux feuilles distinctes.
Toute trace de recherche, même infructueuse, sera pris en compte dans la correction.

Exercice 1 : *(10 points)*

— Partie A —

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 10 + (x-3)\,e^{x}.$$

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Démontrer que $f'(x) = (x-2)e^{x}$ et étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (d) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. (a) Démontrer que la fonction $G : x \longmapsto (x-4)e^{x}$ est une primitive sur $[0\ ;\ +\infty[$ de la fonction $g : x \longmapsto (x-3)e^{x}$.
   (b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Etudier le sens de variation de F sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

— Partie B —

Une entreprise fabrique x tonnes d'un certain produit, avec $x \in [0\ ;\ 4]$. Le coût marginal de fabrication pour une production de x tonnes est donné par $f(x)$ exprimé en **milliers d'euros**, où f est la fonction définie dans la partie 1.

1. Les coûts fixes de l'entreprise s'élèvent à 20 000 euros. On assimile le coût total C à une primitive du coût marginal.
   En utilisant les résultats de la partie A question 2., déterminer le coût total de fabrication $C(x)$, exprimé en milliers d'euros.
2. L'entreprise désire adapter sa production pour atteindre un coût marginal de 11 292 euros.
3. (a) En utilisant la partie A, démontrer qu'il est possible d'atteindre un coût marginal de 11 292 euros.
   (b) Déterminer la production correspondante, à 10 kg près.
   (c) Quel est alors le coût moyen de fabrication ?
   On rappelle que le quotient $\dfrac{C(x)}{x}$ est appelé coût moyen de fabrication pour une production de x tonnes de produit.

Exercice 2 : *(11 points)*

— Partie A —

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3\,e^{0,25\,x}}{2 + e^{0,25\,x}}.$$

1. Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2\,e^{-0,25\,x}}$.
2. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   Interpréter, éventuellement, géométriquement ces résultats.
3. Étudier les variations de la fonction f.

— Partie B —

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$.
   On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus.
   Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle suivante :

   $$(\mathrm{E}_1) : \qquad y' = \frac{y}{4}.$$

   (a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

   (b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.

   (c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions suivantes :

   $$(\mathrm{E}_2) \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{u(t)^2}{12}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0) = 1 \end{cases}.$$

   où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

   (a) On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a $u(t) > 0$.
   On considère, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$.
   Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions suivantes :

   $$(\mathrm{E}_3) \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^+ \\ h(0) = 1. \end{cases}$$

   où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

   (b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

   (c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?