Chapitre 2
Dérivation : étude locale

Sommaire

Capacités :	**Exercices :**	**Bilan :**				
Calculer un taux d'accroissement	3 à 5 p. 128 & 36 à 39 p. 132					
Calculer un nombre dérivé	8 à 11 p. 128 & 41 à 43 p. 132					
Déterminer l'équation d'une tangente	18, 19 p. 129 & 22 à 24 p. 130					

Gottfried LEIBNIZ (1646 à 1716) est poussé par son père à la lecture ce qui va le pousser à faire des études universitaires en philosophie, en théologie et en droit. Il passe son doctorat de droit en 1666 après quoi il travaille dans la diplomatie où il rencontre HUYGHENS. Ce dernier pousse LEIBNIZ à combler ses lacunes en mathématiques ce qu'il fait. La fin de sa vie est gâchée par la paternité de certaines de ses recherches.

I. Nombre dérivé

Définition 2.1 : ***Taux d'accroissement***

On considère une fonction f définie sur un intervalle ouvert I contenant deux nombres a et b distincts.

On appelle ....

le réel t tel que :

$$t = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque 2.2 :

Lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq a$, on peut aussi définir *le taux d'accroissement de la fonction f en a* (ou taux d'accroissement de f entre x et a) par le nombre réel t tel que :

$$t = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Lorsque $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, tel que $a + h \in I$, on peut aussi définir *le taux d'accroissement de la fonction f entre a et $a + h$* par le nombre réel t tel que :

$$\begin{aligned} t &= \frac{f(a+h) - f(a)}{a + h - a} \\ &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \end{aligned}$$

Il s'agit de ce taux d'accroissement que nous allons utiliser par la suite.

Exemple 2.3 :

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4$.

1. Calculer le taux d'accroissement de la fonction f entre 1 et 4.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

Exemple 2.3(suite) :

2. Calculer, en fonction de h, le taux d'accroissement de la fonction f entre 3 et $3+h$ où h est un réel non nul.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Complément(s) :

Exercice résolu 1 p. 115 « Calculer un taux de variation » (excepté question 3).

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 3 à 5 p. 128 et 37 à 39 p. 132 (questions 1 et 2 pour les exercices 37 à 39)

Définition 2.4 : Nombre dérivé

On considère une fonction f définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.

On dit que .... si et seulement si

....

....

Ce nombre est appelé ...., on le note ...., et on écrit :

.... = ...

Remarque 2.5 :

On aurait aussi pu définir *le nombre dérivé de f en a* de la manière suivante :

$$f'(a) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

En effet, en posant .... dans le quotient ci-dessus, on a :

....

On retrouve alors le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$.

De plus, dire que « h se rapproche de 0 », c'est-à-dire « $a+h$ se rapproche de a » revient à dire que « x se rapproche de a ».

Méthodologie 2.6 : ***Calcul d'un nombre dérivé***

En pratique, lorsqu'on veut calculer un nombre dérivé $f'(a)$, on procède de la manière suivante :

1. ....
   ....
2. ....
   ....
3. ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Exemple 2.7 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 4$.

Montrer que f est dérivable en 1 et calculons $f'(1)$.

....
....
....
....
....
....

Exemple 2.7(suite) :

Remarque 2.8 :

Complément(s) :

Exercice résolu 1 p. 117 « Calculer un nombre dérivé ».

Complément(s) :

Vidéo « Calculer le nombre dérivé (1) ».

Complément(s) :

Vidéo « Calculer le nombre dérivé (2) ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 8 à 10 p. 128 et 41 à 43 p. 132 (uniquement la question 1 pour les exercices 41 à 43)

Démonstration exemplaire 2.9 :

Prenons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Cette fonction f est bien définie en 0. Nous allons voir que cette dernière n'est pas dérivable en 0 :

Soit $h > 0$. On calcule alors le taux d'accroissement de f entre 0 et $0 + h$:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

h tend vers . . . .

h	0	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
$\frac{1}{\sqrt{h}}$						

$\frac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers . . . .

. . . .

. . . .

On note alors :

. . . .

Cette limite est infinie et donc f n'est pas dérivable en 0. □

Remarque 2.10 :

Dérivabilité de la fonction valeur absolue en 0.

Prenons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x|$.

Par définition, on rappelle que la fonction g est alors définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Cette fonction est bien définie en 0 et on a . . . .

Remarque 2.10 (suite) :

Nous allons démontrer que cette fonction n'est pas dérivable en 0.

Calculons alors le taux d'accroissement de g entre 0 et $0 + h$:

$$t = \dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots$$

Etudions le résultat de ce taux d'accroissement selon le signe de h :

- Si $h > 0$, alors :

  $t = \dots\dots\dots\dots$

  $= \dots\dots\dots\dots$

  $= \dots\dots\dots\dots$

  Ainsi,

  ....

- Si $h < 0$, alors :

  $t = \dots\dots\dots\dots$

  $= \dots\dots\dots\dots$

  $= \dots\dots\dots\dots$

  Ainsi,

  ....

Finalement, ...

....

....

II. Interprétation géométrique

Définition 2.11 : ***Tangente à une courbe***

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ est ....

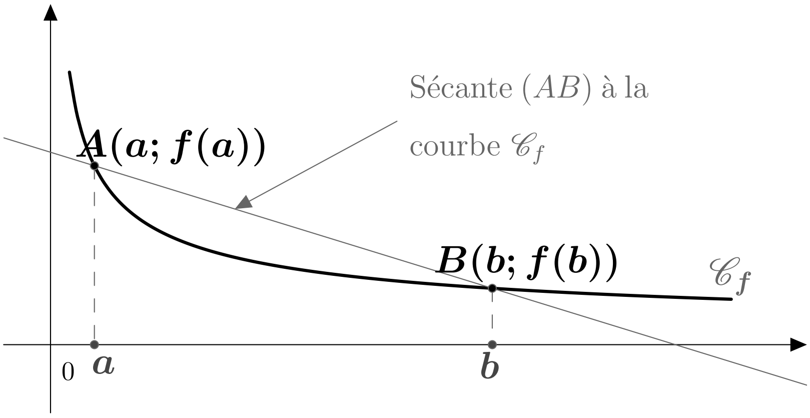
....

Remarque 2.12 :

On considère une fonction f dont on donne sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$.

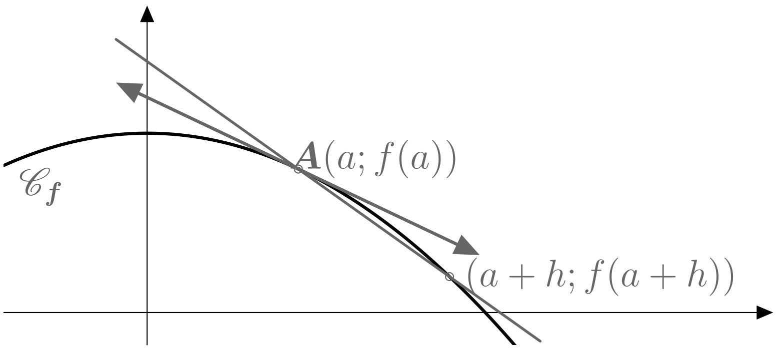
On place deux A et B d'abscisse respective a et b sur $\mathscr{C}_f$ et on trace la droite (AB).

remiquement, le taux d'accroissement de la fonction f entre a et b représente le coefficient directeur d'une sécante à la courbe représentative de la fonction f.



Cette sécante (AB) a bien pour coefficient directeur $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Comme une sécante a pour coefficient directeur un taux d'accroissement et que le nombre dérivé est un taux d'accroissement limite, on peut définir la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a comme une sécante limite ayant pour coefficient directeur le nombre dérivé de f en a.



Cette tangente est symbolisée par un segment à double flèche.

Propriété 2.13 : ***Equation d'une tangente***

L'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ est :

$$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Démonstration 2.14 :

On considère $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

Complément(s) :

Vidéo « Démonstration : équation de la tangente à une courbe ».

Exemple 2.15 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4$.

Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe représentative de la fonction f.

Complément(s) :

Exercice résolu 3 p. 117 « Déterminer l'équation d'une tangente ».

Complément(s) :

Vidéo « Calculer le nombre dérivé (2) ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 18, 19, 22 à 24 p. 129/130

III. Interprétation en physique

Dans cette partie, on va faire un parallèle entre les notions précédemment observées et leur interprétation physique.

On va alors s'intéresser au déplacement d'un mobile M par rapport au temps et donner des illustrations aux notions précédentes.

Pour un temps t, on définit la position du mobile : $d(t)$ appelée loi horaire du mobile.

Définition 2.16 : Vitesse moyenne

On définit la *vitesse moyenne entre deux instants t_1 et t_2*, d'un mobile M dont la loi horaire est donnée par la fonction d, comme le nombre réel v tel que :

$$v = \frac{d(t_1) - d(t_2)}{t_1 - t_2}.$$

Remarque 2.17 :

Notons ici le parallèle entre « taux d'accroissement de f entre a et b » et « vitesse moyenne de d entre les instants t_1 et t_2 ».

De la même manière, la vitesse moyenne entre les instants t et $t+h$ est donnée par :

$$v = \frac{d(t+h) - d(t)}{h}.$$

Définition 2.18 : Vitesse instantanée

La vitesse instantanée d'un mobile M à l'instant t dont la loi horaire est donnée par la fonction d est :

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{d(t+h) - d(t)}{h}.$$

Autrement dit, on a $v(t) = d'(t)$.

Remarque 2.19 :

Notamment en physique, on peut trouver les notations suivantes concernant les notions de nombres dérivés :

$$f'(a) = \frac{df}{dt}(a) = \dot{f}(a).$$