Exercice 1 : *(12 points)*

On traduit les phrases suivantes :

- en l'absence de tout incident, l'alarme se déclenche avec une probabilité $P_{\overline{I}}(A) = \dfrac{1}{50}$
- la probabilité qu'un incident survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à $P(I \cap \overline{A}) = \dfrac{1}{500}$;
- la probabilité qu'un incident se produise est égale à $P(I) = \dfrac{1}{100}$.

1. La probabilité que l'alarme se déclenche sachant qu'un incident s'est produit est $P_I(A)$.
   On a :
$$\begin{aligned} P_I(A) &= 1 - P_I(\overline{A}) \\ &= 1 - \frac{P(I \cap \overline{A})}{P(I)} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{500}}{\frac{1}{100}} \\ &= 1 - \frac{1}{5} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$
   /2 points

2. La probabilité qu'un incident survienne et que l'alarme se déclenche est $P(I \cap A)$.
   On a :
$$\begin{aligned} P(I \cap A) &= P(I) - P(I \cap \overline{A}) \\ &= \frac{1}{100} - \frac{1}{500} \\ &= \frac{4}{500} \\ &= \frac{1}{125}. \end{aligned}$$
   /2 points

3. La probabilité que l'alarme se déclenche est $P(A)$.
   Les événements I et $\overline{I}$ forment un système complet d'événements.
   D'après la formule des probabilités totales, on a :
$$\begin{aligned} P(A) &= P(I \cap A) + P(\overline{I} \cap A) \\ &= P(I \cap A) + P_{\overline{I}}(A) \times P(\overline{I}) \\ &= \frac{1}{125} + \frac{1}{50} \times \frac{99}{100} \\ &= \frac{40}{5\,000} + \frac{99}{5\,000} \\ &= \frac{139}{5\,000} \end{aligned}$$
   /3 points

4. On note D l'événement : « le système est mis en défaut ».
   On a $D = (A \cap \overline{I}) \cup (\overline{A} \cap I)$.
   Les événements $\overline{A} \cap I$ et $A \cap \overline{I}$ sont disjoints.
   On a alors :
$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap \overline{I}) + P(\overline{A} \cap I) \\ &= P(\overline{I}) \times P_{\overline{I}}(A) + P(\overline{A} \cap I) \\ &= \frac{99}{100} \times \frac{1}{50} + \frac{1}{500} \\ &= \frac{99}{5\,000} + \frac{10}{5\,000} \\ &= \frac{109}{5\,000} \end{aligned}$$
   /3 points

5. La probabilité qu'il y ait réellement un incident sachant que l'alarme s'est déclenché est $P_A(I)$.
   On a :
$$\begin{aligned} P_A(I) &= \frac{P(A \cap I)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{1}{125}}{\frac{139}{5\,000}} \\ &= \frac{\frac{40}{5\,000}}{\frac{139}{5\,000}} \\ &= \frac{40}{139}. \end{aligned}$$
   /2 points

Exercice 2 : *(8 points)*

1. **L'affirmation 1 est vraie.** Démontrons ce résultat par récurrence.
   On considère la propriété définie pour tout entier $n \geq 1$, par :
$$u_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$
   — **Initialisation :** Soit $n=1$, on a $u_1 = 2$ et $\dfrac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2$
   Ainsi la propriété est vraie au rang $n=1$.
   — **Hérédité :** Soit $n > 0$.
   On considère la propriété vraie au rang n c'est-à-dire $u_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
   On démontre que la propriété est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.
   On a alors :
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}. \end{aligned}$$
   La propriété est donc héréditaire.
   — **Conclusion :** La propriété est vraie au rang $n=1$, elle est héréditaire à partir de ce rang, donc, pour tout entier $n \geq 1$, par :
$$u_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$
   /2 points

2. **L'affirmation 2 est vraie.**
   La fonction f est dérivable comme somme de deux fonctions composées dérivables sur $\mathbb{R}$.
   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{-x}.$$
   Etudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ en résolvant des inéquations :
$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff 2e^{2x} - 2e^{-x} > 0 \\ &\iff e^{2x} - e^{-x} > 0 \\ &\iff e^{2x} > e^{-x} \\ &\iff 2x > -x \\ &\iff x > 0. \end{aligned}$$
   Ainsi, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ (car pour tout $x \in]-\infty;0[$, on a $f'(x) < 0$) et est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ (car pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a $f'(x) > 0$).
   La fonction f admet donc un minimum en $x = 0$. */2 points*

3. **L'affirmation 3 est vraie.**
   Les événements B et $\overline{B}$ forment une partition de l'univers.
   Ainsi, en appliquant la formule des probabilités totales, on a :
$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$
   Donc, on a :
$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B).$$

3. *(Suite)...* De plus, A et B sont indépendants. Donc, on a :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A)P(\overline{B}) \end{aligned}$$

Les événements A et $\overline{B}$ sont alors indépendants. ***/2 points***

4. **L'affirmation 4 est vraie.**
Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par $g(x) = f(x) - x$.
On a :

$$f(x) = x \iff f(x) - x = 0 \iff g(x) = 0.$$

Ainsi,
— la fonction g est continue sur $[0;1]$ comme différence de deux fonction continues ;
— On a $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ c'est-à-dire $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0;1]$.