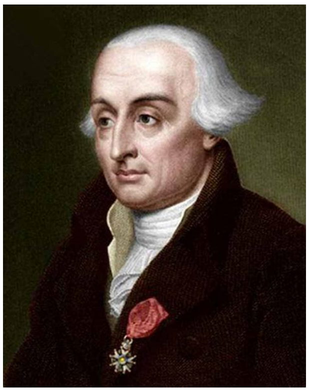
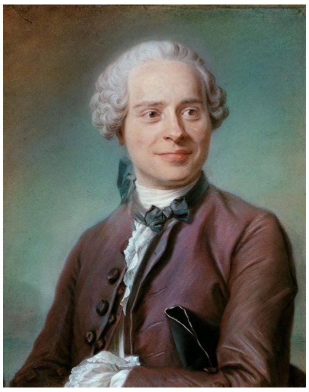
Chapitre 5
Dérivation : étude globale



C'est LAGRANGE qui introduit à la fin du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle les terminologies « fonction primitive » et « fonction dérivée » ainsi que la notation $f'(x)$.
Les règles du calcul infinitésimal n'ont jamais mené ni à des paradoxes ni à des contradictions. Elles ont au contraire permis d'obtenir des résultats nombreux tout au long du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, résultats impossible d'obtenir par d'autres méthodes. Néanmoins les fondements des règles de calcul ne semblent pas assurés. Les critiques au sujet des faiblesses logiques du calcul commencent dès la fin du XVII$^{\text{ème}}$ siècle. Une des critiques les plus célèbres est celle de BERKELEY. C'est suite à ces critiques notamment que les mathématiciens s'efforcent soit de donner donner des interprétations précises des quantités infiniment petites, soit de les éviter dans les calcules.



Pour D'ALEMBERT (comme d'ailleurs pour d'autres mathématiciens), la solution consiste à définir de façon judicieuse une notion de limite. C'est dans un article appelé *Limite* de l'Encyclopédie qu'il expose son idée et l'illustre par des exemples. Cependant sa définition de limite est peu précise : l'utilisation du mot « s'approcher ». Il explique alors que le calcul différentiel peut être présenté sans recours à la notion de quantité infiniment petite. A ses yeux, le calcul différentiel est un ensemble de règles de calcul permettant de déterminer algébriquement la limite de certains rapports. Cet encyclopédiste affirme donc ici que son idée s'adapte facilement à toutes les situations concrètes, mais lui-même n'a traité que quelques exemples. Il laisse donc à ses successeurs la tâche d'explorer systématiquement la notion de limite et de montrer qu'elle fournit des fondations rigoureuses au calcul différentiel.
D'ALEMBERT dispose donc en 1754 de la définition que nous utilisons actuellement pour le nombre dérivé. L'absence de théorie autour de la notion de limite, c'est-à-dire l'absence de théorèmes permettant de manipuler facilement, n'encourageait pas son utilisation. LAGRANGE décide alors d'échafauder une théorie autour des fonctions dérivées en s'appuyant sur la théorie des séries qu'il juge plus sûre. Cependant un des points qui pose problèmes aux mathématiciens de l'époque est le résultat suivant :

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$$

Résultat qui est considéré comme absurde par les mathématiciens du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle car une somme de termes positifs ne peut pas donner un nombre négatif.

Définition 5.1 : ***Fonction dérivable sur un intervalle***

Une fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ si ....

....

....

Ainsi, ...

....

Démonstration exemplaire 5.2 :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et et $h \neq 0$.Démontrer que la fonction g est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ et donner $g'(x)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

.... □

Complément(s) :

Exercice Résolu 1 p. 147 « Etudier la dérivabilité d'une fonction »

Propriété 5.3 :

On considère f une fonction et f' sa fonction dérivée définie sur $D_{f'}$.

$\boldsymbol{f(x) =}$	$\boldsymbol{f'(x) =}$	$\boldsymbol{D_{f'} =}$
k (où $k \in \mathbb{R}$)		
x		
x^2		
$x^n \quad (n \geqslant 1)$		
$\dfrac{1}{x}$		
$\sqrt{x}$		

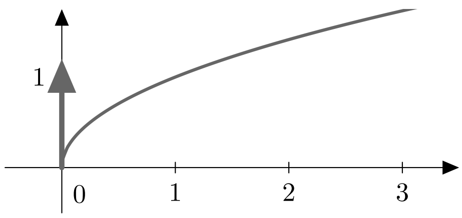
Remarque 5.4 :

On a vu que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

En effet, on a :

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

La courbe représentative de la fonction carrée admet donc une demi-tangente verticale en 0.



Remarque 5.5 :

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Exemple 5.6 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^7$.

Calculer $f'(1)$.

....

....

....

....

....

....

Complément(s) :

Vidéo « Dériver les fonctions usuelles »

Propriété 5.7 :

Soient deux fonctions u et v définies et dérivables sur un même intervalle ouvert I :

Fonction de la forme :	**Dérivée de la forme :**	**Conditions :**
$u + v$		Aucune
$k \times u \quad (k \in \mathbb{R})$		Aucune
$u \times v$		Aucune
$\dfrac{1}{v}$		
$\dfrac{u}{v}$		

Remarque 5.8 :

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Propriété 5.9 : — Dérivation des Polynômes / Fonctions rationnelles

- . . . .
  . . . .
- . . . .
  . . . .

Exemple 5.10 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{10} + x^3$.

Calculer la fonction dérivée f'.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Méthode 5.11 : — Rédaction pour dériver un produit/quotient/...

En pratique lorsqu'on voudra dériver une fonction f qui s'écrit sous la forme d'un produit ou d'un quotient, on prendra l'habitude d'utiliser la rédaction suivante :

> La fonction f est du type $\ldots$ avec $u(x) = \ldots$ et $v(x) = \ldots$.
>
> Pour tout $x \in$ ..., on a donc $u'(x) = \ldots$ et $v'(x) = \ldots$.
>
> Ainsi, pour tout $x \in$ ..., on a :
>
> $$f'(x) = \ldots$$

Exemple 5.12 :

Dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 2)(-3x + 5)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Complément(s) :

Exercices Résolus 2 et 3 p. 147 « Déterminer la fonction dérivée » et « Déterminer la dérivabilité et la dérivée d'une fonction »

Complément(s) :

Vidéo « Dériver une fonction (1) »

Complément(s) :

Vidéo « Dériver une fonction (2) : somme »

Complément(s) :

Vidéo « Dériver une fonction (3) : produit »

Complément(s) :

Vidéo « Dériver une fonction (4) : inverse »

Complément(s) :

Vidéo « Dériver une fonction (5) : quotient »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 1 (questions 1 et 2), 3, 4, 8 et 13 p. 160.

Définition 5.13 : Composée d'une fonction affine

On considère u une fonction définie sur I et a et b deux nombre réels.

On définit la fonction suivante :

$$f : x \longmapsto .... \longmapsto ....$$

Cette fonction f est appelée ....

....

Exemple 5.14 :

Exprimer, en fonction de x, les fonctions f suivantes définies par $f(x) = u(ax + b)$ lorsque :

1. $u(x) = \sqrt{x}$ et $ax + b = 2x + 3$;

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $ax + b = -3x + 7$;

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

3. $u(x) = x^2 + 6$ et $ax + b = 3x - 1$;

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

4. $u(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x - 9}$ et $ax + b = 3x - 2$.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

Propriété 5.15 :

On considère une fonction u définie et dérivable sur I et a et b deux réels tels que $ax+b \in I$.

La fonction $f : x \longmapsto u(ax+b)$ est dérivable sur $D = \{x \in \mathbb{R} : ax+b \in I\}$ et, pour tout $x \in D$, on a :

$$f'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Exemple 5.16 :

On considère la fonction f définie sur $\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \sqrt{3x-2}.$$

Calculer la dérivée de la fonction f.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 1 (question 3), 5 et 6 p. 160