Chapitre 1
2^{nd} degré - Etude algébrique

Sommaire

Capacités :	**Exercices :**	**Bilan :**				
Donner la forme canonique d'un trinôme	6 p. 64 et 41 p. 68					
Donner la forme factorisée d'un trinôme	15 à 18 p. 65 et 19 p. 66					
Résoudre une équation du second degré	20 à 24 p. 66					

Diophante (entre 150 et 350 ap. J.C) est un mathématicien d'origine syrienne qui a vécu 84 ans. Il passe une grande partie de sa vie à Alexandrie et possède une parfaite connaissance de la culture grecque. Il écrit trois ouvrages. Son second ouvrage est composé de 13 tomes (uniquement six nous sont parvenus) et traite notamment d'arithmétique ainsi que des équations du second degré en introduisant l'utilisation de symboles (novateur pour l'époque).

I. Le trinôme $ax^2 + bx + c$

1. La forme développée

Définition 1.1 : ***trinôme (ou polynôme du 2^{nd} degré)***

Dire qu'une fonction f est une fonction polynôme de degré 2 (ou fonction trinôme) signifie qu'il existe des nombres réels a $(a \neq 0)$, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il s'agit de ……………………………………………………………………………………

Les nombres a, b et c sont ……………………………………………………………………

Exemple 1.2 :

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x^2 - 4x + 3$ est une fonction trinôme.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Remarque 1.3 :

Il n'est pas interdit d'avoir $b = 0$ et/ou $c = 0$.

Ainsi, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -4x^2$ est une fonction trinôme avec ………………………

……………………………………………………………………………………………………

Exemple 1.4 :

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = (x-1)^2 - x^2$ n'est pas une fonction du second degré.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2. La forme canonique

Théorème 1.5 :

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

Alors f admet une écriture, dite ...., telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Avec :

....

Méthodologie 1.6 : ***Déterminer la forme canonique***

Pour déterminer la forme canonique d'un trinôme, à partir de sa forme développée, on peut utiliser la formule ci-dessus, ou procéder de la manière suivante :

1. ....
   ....
2. ....
   ....
   ....
   ....
   ....
3. ....
   ....
   ....

Complément(s) :

Vidéo « Déterminer la forme canonique d'une fonction du second degré ».

Complément(s) :

Exercice résolu 1 p. 49 « Déterminer la forme canonique »

Exemple 1.8 :

Déterminer la forme canonique de la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 16x + 37$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 6 p. 64 et 41 p. 68

II. Factorisation d'un trinôme

Définition 1.9 : ***Discriminant d'un trinôme***

Le discriminant, noté Δ, d'un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est le nombre :

$$\Delta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque 1.10 :

La forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2 est alors donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Exemple 1.11 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + x$. Déterminer son discriminant Δ.

....

....

1. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Définition 1.12 : ***Equation du second degré***

Résoudre une équation du second degré c'est trouver tous les réels x qui vérifient une équation du type :

....

Remarque 1.13 :

....

....

....

....

Théorème 1.14 :

On considère l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) et soit Δ son discriminant :

- ....
  ....
  ....
  ....
- ....
  ....
  ....
  ....
- ....
  ....
  ....
  ....

Complément(s) :

Vidéo « Démonstration : Solutions d'une équation du second degré ».

Complément(s) :

Exercice résolu 1 p. 51 « Déterminer les solutions d'une équation du second degré »

Démonstration exemplaire 1.16 :

On considère l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$) et soit Δ son discriminant.

On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $ax^2 + bx + c = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ainsi, on a :

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le signe de $\dfrac{\Delta}{4a^2}$ dépend du signe de .... car .... est un nombre strictement positif. Ainsi, on distingue 3 cas :

- $\Delta < 0$: on a ....c'est-à-dire ....

  Finalement, ...

  ....

- $\Delta = 0$: on a alors :

  $$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

  $$\iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

  Finalement, ...

  ....

- $\Delta > 0$: on a alors :

  $$\begin{aligned}\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} &\iff x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \\ &\iff x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\iff x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\iff x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.\end{aligned}$$

  Pour $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions :

  $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

$\square$

Méthodologie 1.17 : ***Résolution des équations du second degré***

Pour résoudre une équation du second degré, on procèdera de la manière suivante :

1. ....
....
2. ....
....
....
....

Exemple 1.18 :

Résoudre l'équation $3x^2 - x + 2 = -2x^2 - 5x + 1$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Complément(s) :

Vidéo « Résoudre une équation du second degré (1) ».

Complément(s) :

Vidéo « Résoudre une équation du second degré (2) ».

Complément(s) :

Vidéo « Résoudre une équation du second degré (3) ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 20 à 24 p. 66

2. Factorisation d'un trinôme

Théorème 1.22 : ***Forme factorisée d'un trinôme***

On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) et soit Δ son discriminant.

- ....
  ....
- ....
  ....
  ....
- ....
  ....
  ....
  ....

Exemple 1.23 :

Factoriser (si possible) les polynômes suivants :

1. $g(x) = -3x^2 + 12x - 12$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Exemple 1.23(suite) :

2. $f(x) = 3x^2 - 2x - 7$

Complément(s) :

Vidéo « Factoriser un trinôme ».

Complément(s) :

Exercice résolu 2 p. 51 « Factoriser un trinôme »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 15 à 18 p. 65 et 19 p. 66

3. Relation entre coeffcients et racines

Propriété 1.25 :

Deux réels x_1 et x_2 ont pour somme s et pour produit p si et seulement si ils sont solutions de l'équation suivante :

$$x^2 + sx + p = 0.$$

Exemple 1.26 :

Existe-t-il deux nombres réels dont la somme vaut 5 et le produit 2 ?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Propriété 1.27 :

On considère deux solutions, x_1 et x_2 de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x_1,\ x_2 \text{ solutions de } ax^2 + bx + c = 0 \iff \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Méthodologie 1.28 : ***Recherche rapide d'une racine***

La dernière propriété nous donne un lien entre les coefficients d'une fonction polynôme du second degré et ses racines.

Ainsi, lorsqu'on connait une racine (ou qu'elle est évidente) d'un polynôme du second degré, on peut utiliser le lien entre les racines et les coefficients de la fonction.

Exemple 1.29 :

On considère l'équation $4x^2 - 10x + 6 = 0$.

Résoudre cette équation après avoir vérifié que 1 est racine évidente.

....

....

....

....

....

....

Complément(s) :

Exercice résolu 3 p. 51 « Détecter les racines d'un polynôme du second degré »