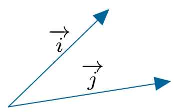
Chapitre 8
Vecteurs : Partie 2

I. Repères du plan

Définition 8.1 : ***Base du plan***

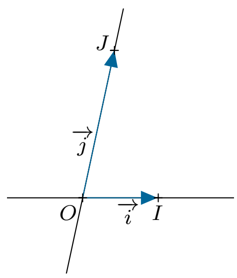
On appelle base du plan tout couple de vecteurs non colinéaires $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.



Définition 8.2 : ***Repère du plan***

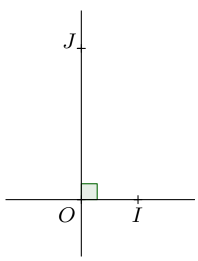
Soient O un point du plan et $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ une base de ce plan.
Le triplet $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est appelé repère du plan.
De plus, si $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$, on a :

- **Le point O** est **l'origine du repère**.
- $\boldsymbol{(OI)}$ est alors appelée **l'axe des abscisses**.
- $\boldsymbol{(OJ)}$ est appelé **l'axe des ordonnées**.

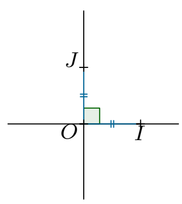


Définition 8.3 : ***Repère orthogonal/orthonormal***

Un repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est dit **orthogonal** si et seulement si l'axe des abscisses est perpendiculaire à l'axe des ordonnées : $\boldsymbol{(OI)} \perp \boldsymbol{(OJ)}$.



Un repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est dit **orthonormal** si et seulement si il est orthogonal et si $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\|$.



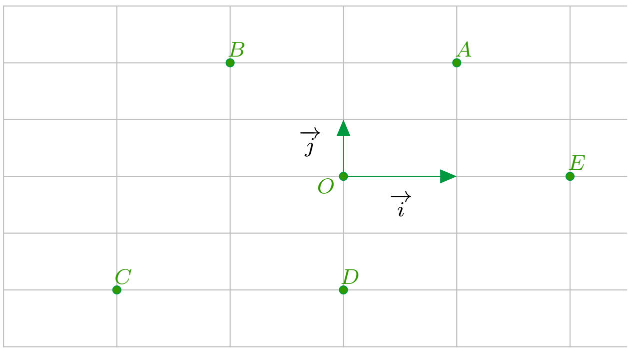
II. Coordonnées d'un point

Théorème 8.4 :

Soit $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère du plan.
Tout point M du plan admet un unique couple de réels $(x; y)$ qui vérifie :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

Exemple 8.5 :



Compléter les égalités suivantes :

- $\overrightarrow{OA} = \ldots\,\vec{i} + \ldots\,\vec{j}$
- $\overrightarrow{OB} = \ldots\,\vec{i} + \ldots\,\vec{j}$
- $\overrightarrow{OC} = \ldots\,\vec{i} + \ldots\,\vec{j}$
- $\overrightarrow{OD} = \ldots\,\vec{i} + \ldots\,\vec{j}$
- $\overrightarrow{OE} = \ldots\,\vec{i} + \ldots\,\vec{j}$

Définition 8.6 : ***Coordonnées d'un point***

Dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, tout point M du plan vérifie l'égalité vectorielle présentée dans le théorème précédent :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

- Le couple $\boldsymbol{(x; y)}$, appelé **coordonnées** du point M.
- $\boldsymbol{x}$ est appelé **l'abscisse** de M.
- $\boldsymbol{y}$ est appelé **l'ordonnée** de M.

On note alors $M(x; y)$.

Exemple 8.7 :

En reprenant l'exemple précédent, déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E et O dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Remarque 8.8 :

Dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on a systématiquement : $O(0; 0)$ $I(1; 0)$ $J(0; 1)$.

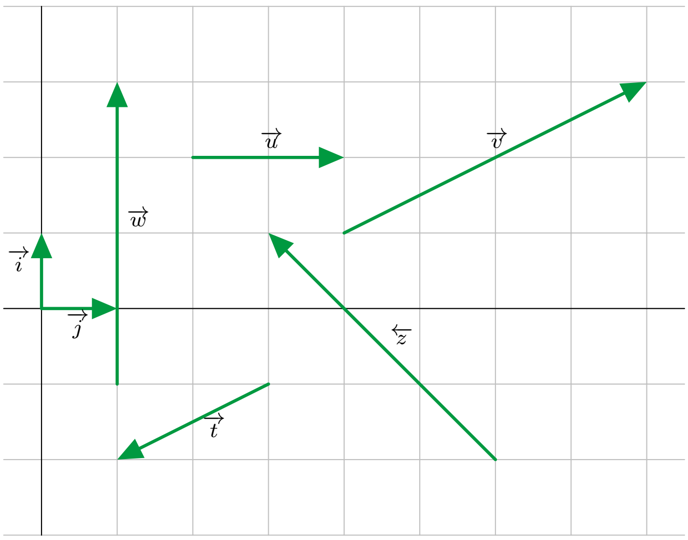
III. Coordonnées d'un vecteur

Théorème 8.9 :

Soit $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan.
Tout vecteur $\vec{u}$ du plan admet un unique couple de réels $(x;y)$ qui vérifie :

$$\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$$

Exemple 8.10 :



Compléter les égalités suivantes :

- $\vec{u}=\ldots\,\vec{i}+\ldots\,\vec{j}$
- $\vec{v}=\ldots\,\vec{i}+\ldots\,\vec{j}$
- $\vec{w}=\ldots\,\vec{i}+\ldots\,\vec{j}$
- $\vec{z}=\ldots\,\vec{i}+\ldots\,\vec{j}$
- $\vec{t}=\ldots\,\vec{i}+\ldots\,\vec{j}$

Définition 8.11 : ***Coordonnées d'un vecteur***

Dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, tout vecteur $\vec{u}$ du plan vérifie l'égalité vectorielle présentée dans le théorème précédent :

$$\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$$

- Le couple $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}$, appelé **coordonnées** du point $\vec{u}$.
- $\boldsymbol{x}$ est appelé **l'abscisse** de $\vec{u}$.
- $\boldsymbol{y}$ est appelé **l'ordonnée** de $\vec{u}$.

On note alors $M(x;y)$.

Exemple 8.12 :

En reprenant l'exemple précédent, déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$ et $\vec{t}$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$.

Remarque 8.13 :

Dans la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$, on a systématiquement : $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 13 et 14 page 103 (uniquement les questions a).
Exercice 67 page 111.

Propriété 8.14 :

On considère un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ dans lequel on a deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
Alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Exemple 8.15 :

On considère un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ dans lequel on a $A(8; -5)$ et $B(1; 2)$.
Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

IV. Milieu d'un segment

Propriété 8.16 :

Dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.
Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $(x_I; y_I)$, avec :

$$\boldsymbol{x_I = \frac{x_A + x_B}{2}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{y_I = \frac{y_A + y_B}{2}}$$

Exemple 8.17 :

Soient $A(1, 2)$ et $B(-3, 5)$ deux points dans un repère orthonormé.
Calculer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.

Méthode 8.18 : — ***Montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme***

Soient $A(3; -2)$, $B(-2; -1)$, $C(0; -3)$ trois points d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.
Montrer que le quadrilatère AIBC est un parallélogramme.

Méthode 8.19 : — ***Calculer les coordonnées de l'image d'un point par une symétrie***

On considère un repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ dans lequel on place les points $A(2; 3)$ et $B(-5; 1)$.
Calculer les coordonnées de A' symétrique de A par rapport au point B.

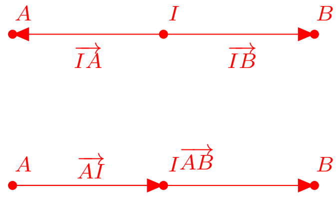
Méthode 8.20 : — ***Calculer les coordonnées d'un point pour obtenir un parallélogramme***

On considère un repère $(O; I; J)$ dans lequel on place les points $A(-1; 2)$, $B(2; 4)$ et $C(3; 1)$.
Déterminer les coordonnées du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Propriété 8.21 :

Dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère trois points A, B et I où I est le milieu du segment $[AB]$.
On a alors :

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$



V. Coordonnées d'un vecteur

Propriété 8.22 :

Dans un repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.

Propriété 8.23 :

Dans un repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$, on considère un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et k un nombre réel, alors le vecteur $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Exemple 8.24 :

Soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et les points C et D tels que $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AB}$.
Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Propriété 8.25 :

On considère $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si :

- leurs coordonnées sont proportionnelles : $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$ (avec $k \in \mathbb{R}$).
- $xy' = x'y$.

Exemple 8.26 :

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 8 \\ -12 \end{pmatrix}$.

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?

VI. Applications

Définition 8.27 : Déterminant de deux vecteurs

Dans un repère $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On appelle déterminant de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et on note $\det\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right)$, le nombre :

$$\det\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right) = x\,y' - x'\,y$$

Exemple 8.28 :

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix}$. Calculer $\det\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right)$.

Propriété 8.29 :

$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ colinéaires} \iff \det\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right) = 0$$

Exemple 8.30 :

- En reprenant les deux vecteurs de l'exemple précédent, dire si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
- Les vecteurs $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{z}\begin{pmatrix} -16 \\ 36 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Propriété 8.31 :

On a :

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires} \iff (AB)//(CD).$$

Exemple 8.32 :

On considère les points suivants $A\,(2;3)$, $B\,(-2;1)$, $C\,(5;0)$ et $D\,(1;-2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Les deux vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ?
3. En déduire que la position relative des deux droites (AB) et (CD).

Propriété 8.33 :

On a :

$$A,\ B,\ \text{et } C \text{ alignés} \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires.}$$

Exemple 8.34 :

On considère 3 points $A\,(2;5)$, $B\,(-1;1)$ et $C\,(-7;-7)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CB}$.
2. Montrer que ces deux vecteurs sont colinéaires.
3. En déduire que les points A, B et C sont alignés.