Chapitre 2
Etude des fonctions

Sommaire

Capacités :	**Exercices :**	Non Acquis	Acquis
Etudier une fonction	6 p. 130		
Déterminer une fonction composée	2, 3 et 4 p. 130		
Calculer une dérivée	7, 8, 13, 14 p. 130		

Introduction

Richard DEDEKIND (1831 à 1916) est d'abord intéressé par la physique et la chimie, puis il se tourne vers les mathématiques de par la précision de cette matière.
Il construit l'ensemble des nombres réels en même temps que les mathématiciens MERAY et CANTOR par une méthode dite des coupures et définit alors sur cet ensemble un ordre, une multiplication et une addition.
Une anecdote :

> DEDEKIND a lu sa propre mort dans *Calendrier des mathématiciens* à la date du 4 septembre 1899. Il répondu alors à l'auteur que ce jour là, il avait eu un entretien avec CANTOR et « qui, à cette occasion, ne me donna pas à moi, mais à mes erreurs, le coups de grâce ».

Une citation :

> « En sciences, ce qui est démontrable ne doit pas être admis sans démonstration. »

I. Tangente d'un point à une courbe

Définition 2.1 : ***Taux d'accroissement***

On considère une fonction définie sur un intervalle I contenant les deux nombres a et b. On appelle taux d'accroissement de la fonction f entre a et b le quotient :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Exemple 2.2 :

On considère une fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 4$.

1. Calculer le taux d'accroissement de la fonction f entre 1 et 4.
2. Calculer, en fonction de h, le taux d'accroissement de la fonction f entre 3 et $3 + h$.

Définition 2.3 : ***Nombre dérivé***

On considère une fonction définie sur un intervalle I contenant le nombre a et h un nombre proche de zéro. Dire que la fonction f est dérivable en a signifie que le taux d'accroissement entre a et $a + h$, c'est-à-dire $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, se rapproche d'un nombre lorsque h tend vers zéro.
Ce nombre est appelé nombre dérivé de f en a, on le note $f'(a)$ et on écrit :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Exemple 2.4 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4$.
f est dérivable en -3 :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = \lim_{h\to 0} 6 - h = 6$$

On a donc $f'(-3) = 6$

Définition 2.5 : ***Tangente***

La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété 2.6 :

L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A(a; f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Complément(s) :

Lire la vidéo « Déterminer une équation de la tangente à une courbe ».

D
de

II. Les fonctions dérivées.

Définition 2.9 : ***Fonction dérivée***

Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point de I (i.e. pour tout $x \in I$, $f'(x)$ existe).

Exemple 2.10 :

Déterminer la fonction dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$.

1. Les dérivées usuelles

Propriété 2.11 :

f est définie par :	f' est définie par :	f' est définie sur :
$f(x) = k$ où $k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad (n \geq 1)$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

2. Opérations sur les dérivées

Propriété 2.12 :

On considère deux fonctions u et v dérivables sur un même intervalle I :

Fonction de la forme :	Dérivée :	Conditions :
$u+v$	$u'+v'$	Aucune
$k.u \quad ou \quad k \in \mathbb{R}$	$k.u'$	Aucune
$u.v$	$u'v+v'u$	Aucune
$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$	pour tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	pour tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$

3. Compléments : Dérivée d'une composée

Propriété 2.13 :

On considère une fonction u définie sur un intervalle I.

Fonction de la forme :	Dérivée :	Conditions :
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	pour tout $x \in I$ tel que $v(x) > 0$
$u^n \quad ou \quad n \in \mathbb{Z}$	$n \cdot u' \cdot u^{n-1}$	Aucune (si $n \geq 0$) pour tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$ (si $n < 0$)
$x \longmapsto u(ax+b)$	$x \longmapsto a \cdot u'(ax+b)$	Aucune

Exemple 2.14 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^4+x^2+1}$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que $x \mapsto x^4+x^2+1$ est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer f'.

Remarque 2.15 :

Ces dernières formules ne sont que des cas particuliers de la formule de dérivée des fonctions composées.

Définition 2.16 : Composée de 2 fonctions

On considère deux fonctions u et v, u étant définie sur un intervalle I et v sur l'intervalle image $u(I)$.
La composée de v par u, notée $v \circ u$, est la fonction définie sur I et, pour tout $x \in I$, on a :

$$(v \circ u)(x) = v\left(u(x)\right).$$

Complément(s) :

Lire la vidéo « Identifier la composée de deux fonctions ».

Exemple 2.18 :

On considère les fonctions u et v définies par $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 3x - 4$.
Déterminer le domaine de définition ainsi que l'expression des fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$.

Exercice(s) :

Exercices 2, 3 et 4 p. 130.

Complément(s) :

Lire la vidéo « Composer deux fonctions ».

Propriété 2.20 :

Plus généralement, en considérant une fonction u définie et dérivable sur I et une fonction v définie et dérivable sur $J = u(I)$. Alors :

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x)).$$

Exemple 2.21 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{(2x^2 + 3x + 5)^2}$.

1. Etudier le domaine de définition de la fonction f.
2. Déterminer $f'(x)$.

Complément(s) :

Lire la vidéo « Dériver une fonction composée (Cas général) ».

Complément(s) :

Lire la vidéo « Calculer la dérivée d'une fonction composée ».

Complément(s) :

Lire la vidéo « Dériver des fonctions exp(u) ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 7, 8, 13 et 14 p. 130

III. Etude des variations d'une fonction

Théorème 2.25 :

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et soit f' sa fonction dérivée, alors :
- Si f est strictement croissante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f(x) > 0$.
- Si f est strictement décroissante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f(x) < 0$.
- Si f est constante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f(x) = 0$.

Méthodologie 2.26 : — Etudier les variations d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction f sur un intervalle I, on applique la méthode suivante :
1. On calcule la dérivée de la fonction f sur I ;
2. On étudie le signe de la fonction f' sur I (on peut donner le tableau de signes de f') ;
3. On justifie les variations de f sur I par le signe de la dérivée.

Complément(s) :

Lire la vidéo « Etudier les variations d'une fonction ».

Exemple 2.27 :

Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + x - 5$.

Remarque 2.28 :

Il faut faire une différence entre « étudier les variations » et « dresser le tableau de variations ».
« étudier les variations »implique de justifier les variations de la fonction en s'appuyant sur le signe de sa dérivée. On pourra utiliser la rédaction suivante :

Pour tout $x \in I$, on a $f'(x)$...0, donc la fonction f est strictement .... sur I.

Rien n'interdit de résumer ensuite le tout par un tableau de variations.

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 6 p. 130