Chapitre 4
Arithmétique : PGCD & Théorèmes de BEZOUT et GAUSS

Sommaire

Capacités :	Exercices :	Bilan :				
Déterminer le Pgcd de deux entiers						
Appliquer le théorème de BEZOUT						
Appliquer le théorème de GAUSS						
Résoudre une diophantienne						

Étienne BEZOUT (1730-1783) est né à Nemours dans une famille modeste. Orphelin à 20 ans, il finit la même année ses études au collège et part à Paris où il gagne sa vie en tant que maitre de mathématiques. A partir de 1755, il fait partie de l'entourage de d'Alembert et travaille sur des sujets de pointe en mathématiques. Après avoir présenté deux mémoires à l'Académie, l'un sur de Mécanique et l'autre sur les intégrales elliptiques. Il est élu adjoint académicien en 1758 dans la classe de Mécanique. Il travaille sur le calcul intégral et des problèmes de dynamique jusqu'en 1762, année où il choisit les équations comme unique thème de recherche. En mathématiques, ses deux œuvres majeures sont un mémoire académique de 1764 et sa Théorie générale des équations algébriques en 1779. Ce qui apparait fortement, c'est la détermination de Bézout à faire des mathématiques. CHOISEUL, ministre de la Marine, nomme Étienne BEZOUT responsable et examinateur des écoles d'officiers de la Marine en 1774, sur recommandation de Charles Étienne Louis CAMUS. Bézout écrit son cours de 1764 à 1769 : *Cours de mathématiques à l'usage de l'artillerie.*
En 1764, il écrit une de ses ouvres les plus importantes, *Théorie générale des équations algébriques*, celle dans laquelle il est le premier à démontrer rigoureusement que le degré de la résultante de deux équations est au plus égal au produit des degrés. C'est aussi là qu'il commence à mettre en place l'algorithme qui deviendra le Bézoutien.

I. PGCD de deux entiers

Activité 4.1 :

Dans une maison nouvellement construite, on veut carreler les sols de certaines pièces.

1. Le sol de la salle à manger est un rectangle de longueur 4,54 m et de largeur 3,75 m. On veut carreler cette pièce avec des carreaux carrés de 33 cm de côté. On commence la pose par un coin de la pièce. Calculer le nombre de carreaux non découpés qui auront été posés.

   ....

   ....

   ....

   ....

2. Le sol de la cuisine est un rectangle de longueur 4,55 m et de largeur 3,85 m. On veut carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe.

   (a) Donner la liste des diviseurs de 455 puis la liste des diviseurs de 385.

   ....

   ....

   ....

   (b) Donner la liste des diviseurs communs à 455 et 385.

   ....

   ....

   (c) Quel est alors le plus grand côté possible des dalles carrées pour carreler cette cuisine sans découpe ?

   ....

   ....

Définition 4.2 : ***Plus Grand Commun Diviseur***

On considère a et b deux entiers relatifs non nuls.

....

....

....

On le note ....

Exemple 4.3 :

Pour chacun des cas suivants, déterminer :

- pgcd$(24; 18)$

  ....
  ....
  ....
  ....

- pgcd$(60; 15)$

  ....
  ....
  ....
  ....

- pgcd$(150; 240)$

  ....
  ....
  ....
  ....

Complément(s) :

Vidéo « Dtéerminer le pgcd de deux nombres (listes des diviseurs) »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 1 p. 148

Définition 4.4 : ***Entiers premiers entre eux***

On considère deux entiers a et b.

....
....

Exemple 4.5 :

Justifier que les entiers 71 et 19 sont premiers entre eux.

....
....
....
....

Remarque 4.6 :

Si a et b sont deux entiers relatifs non tous les deux nuls.

- $\text{pgcd}(a;b) \in \mathbb{N}^*$.
- $\text{pgcd}(1;b) = 1$ et $\text{pgcd}(0;b) = |b|$
- $\text{pgcd}(a;b) = \text{pgcd}(b;a) = \text{pgcd}(|a|;|b|)$

Propriété 4.7 : ***Lemme d'Euclide***

On considère a et b deux entiers relatifs non nuls tels que il existe $(q;r) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$. On note $\mathscr{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs d'un entier n.

....

....

....

Ainsi, on a :

....

De plus, on a :

....

Démonstration 4.8 :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Propriété 4.9 :

- Si b divise a alors ....
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a ....

Exemple 4.10 :

En utilisant les formules précédentes, déterminer pgcd$(150; 240)$.

....

....

....

....

....

....

Complément(s) :

Vidéo « Déterminer le pgcd de deux nombres (formules) »

Exemple 4.11 : ***Algorithme d'Euclide***

L'algorithme d'Euclide est le suivant :

```
def AlgorithmeEuclide(a,b) :
    r=b
    while r !=0 :
        r=a-a//b
        a=b
        b=r
    return(r)
```

Tester la fonction ci-contre avec :

- $a = 150$ et $b = 240$: ....
- $a = 71$ et $b = 19$: ....
- $a = 60$ et $b = 15$: ....

Que permet de faire cet algorithme ?

....

....

....

....

Exemple 4.12 :

Appliquer l'algorithme d'Euclide afin de déterminer pgcd$(240; 36)$.

....

....

....

....

....

....

Complément(s) :

Exercice Résolu 2 p.139 « Déterminer le pgcd de deux nombres avec l'algorithme d'Euclide »

Complément(s) :

Vidéo « Déterminer le pgcd de deux nombres (Algo d'Euclide) »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 4 p. 148

Propriété 4.13 :

On considère a et b deux entiers relatifs non tous les deux nuls et d un entier naturel.

....

....

....

II. Théorème de BEZOUT

Propriété 4.14 : ***Egalité de BEZOUT***

On considère deux entiers non nuls a et b et $d = \text{pgcd}(a; b)$.

....

....

....

Démonstration 4.15 :

On considère deux entiers non nuls a et b et $d = \text{pgcd}(a; b)$.

On pose $\mathcal{E}$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs de la forme $ma + nb$, où m et n sont des entiers relatifs.

- $\mathcal{E}$ ε est une partie non vide de $\mathbb{N}$: ....

  ....

Démonstration 4.15 (suite) :

- De plus, $\mathcal{E}$ admet donc un plus petit élément d tel que $d = au + bv$.

  On va montrer que $d = \text{pgcd}(a;b)$.

  — $\text{pgcd}(a;b) \mid d$: ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  — $d \mid \text{pgcd}(a;b)$: ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

Conclusion : ....

....

....

Exemple 4.16 :

Justifier que 7 et 17 sont premiers entre eux.

En déduire un couple $(u;v)$ solution de l'équation $7u + 17v = 1$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Théorème 4.17 : ***Théorème de BEZOUT***

On considère deux entiers a et b.

....

....

....

....

Démonstration 4.18 :

On considère deux entiers a et b.

- $\Longrightarrow$: immédiat avec l'égalité de Bezout.
- $\Longleftarrow$: On suppose qu'il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$. Alors $\text{pgcd}(a;b)$ divise a et b donc $\text{pgcd}(a;b)$ divise toute combinaison linéaire : $au + bv$. Ainsi $\text{pgcd}(a;b)$ divise 1 et donc $\text{pgcd}(a;b) = 1$.

Exemple 4.19 :

Montrer que $2n + 1$ et $3n + 2$ sont premiers entre eux pour tout $n \in \mathbb{N}$.

....

....

....

....

....

....

Exemple 4.20 :

Montrer que 59 et 27 sont premiers entre eux, puis déterminer un couple $(x;y) \in \mathbb{Z}$ tel que $59x + 27y = 1$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Complément(s) :

Exercice Résolu 1 p. 141 « Déterminer les coefficients de Bezout »

Complément(s) :

Vidéo « Utiliser le théorème de Bezout »

Propriété 4.21 :

On considère deux entiers a et b.

....

....

....

Exemple 4.22 :

L'équation $9x - 15y = 2$ admet-elle des solutions ?

....

....

....

....

....

Exemple 4.23 :

L'équation $4x + 9y = 2$ admet-elle des solutions ?

....

....

....

....

....

III. Théorème de Gauss

Théorème 4.24 :

On considère a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

....

....

Démonstration 4.25 :

On considère a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

....

....

....

....

....

....

Exemple 4.26 :

Trouver les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $5(x-1) = 7y$.

....

....

....

....

....

....

....

Propriété 4.27 :

On considère a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

....

....

Démonstration 4.28 :

On considère a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

....

....

....

....

....

....

....

Complément(s) :

Vidéo « Utiliser le théorème de Gauss »

IV. Equations diophantiennes

Définition 4.29 : Equation diophantienne

Une équation diophantienne est une équation du type $au + bv = c$, où a, b et c sont connus.

Méthodologie 4.30 : Résoudre une équation diophantienne

Pour résoudre une équation diophantienne de la forme $au + bv = c$, on procède de la manière suivante :

1. On applique l'algorithme d'Euclide pour calculer le pgcd de a et b.
2. On justifie l'existence (ou non) de solutions.
3. On cherche une solution particulière $(u_0; v_0)$ en remontant l'algorithme d'Euclide.
4. On se ramène à une équation où les membres de gauches et de droites sont des produits.
   $(u; v)$ et $(u_0; v_0)$ étant solutions de $au + bv = c$, on a :
   $$\begin{array}{rrrl} a & u+ & bv & =c \\ -(a & u_0+ & bv_0 & =c) \\ a & (u-u_0)+ & b(v-v_0) & =0 \end{array}$$
   Ainsi, on obtient l'équation $a(u - u_0) = -b(v - v_0)$
5. On applique le théorème de Gauss à l'équation précédemment trouvée.
6. On vérifie que les couples trouvés précédemment vérifient l'équation diophantienne $au + bv = c$.

Exemple 4.31 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation diophantienne $8u + 5v = 1$.

....

....

....

....

....

....

Exemple 4.31(suite) :

Exemple 4.31 (suite) :

Remarque 4.32 :

- Dans le cas où c est un multiple de $\text{pgcd}(a;b)$, on résout $ax+by=\text{pgcd}(a;b)$ puis on multiplie les solutions obtenues pour retomber sur c. Par exemple, pour résoudre $8x+5y=9$, on résout $8x+5y=1$. Les solutions de cette équation sont $(x;y)=(5k+2;8k-3)$ avec $k\in\mathbb{Z}$. On multiplie alors par 9 les solutions pour obtenir les solutions de $8x+5y=9$ sont $(x;y)=(45k+18;72k-27)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
- Dans le cas où c n'est pas un multiple de $\text{pgcd}(a;b)$, alors il n'existe pas de solution.

Complément(s) :

Exercice Résolu 2 p. 143 « Résoudre une équation diophantienne »

Complément(s) :

Vidéo « Résoudre une équation de la forme $ax+by=c$ (équation diophantienne) »