Chapitre 4
Fonctions Exponentielles

Sommaire

Capacités :	**Exercices :**	Non Acquis	Acquis
Transformer des expression avec les puissances			
Etudier une fonction de la forme $x \longmapsto ka^x$			
Calculer un taux moyen d'évolution			

I. Définition des fonctions exponentielles

Définition 4.1 : ***Exponentielle de base a***

On considère une nombre $a \in \mathbb{R}^+$ (nombre réel strictement positif : $a > 0$).

La fonction exponentielle de base a est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ comme étant le prolongement de la suite géométrique (u_n) de raison $q = a$ et de premier terme $u_0 = 1$.

(u_n) géométrique de raison $q = a$ et de premier terme $u_0 = 1$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = a^n$.	$\Longrightarrow$	La fonction f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = a^x$

Exemple 4.2 :

Le livret A est un livret qui rapporte des intérêts composés au taux de 3%. Tom place 1 000 € sur un livret A. On note u_n le montant du livret A au bout de n années après son ouverture.

1. Justifier que la suite (u_n) est géométrique (en précisant la raison et le premier terme).
2. Donner le terme général de la suite (u_n).
3. Proposer l'expression d'une fonction f permettant d'estimer le capital du livret A de Tom au bout de x années après son ouverture.
4. Déterminer, à l'aide de la fontion f déterminée précédemment, le montant du livret A de Tom après 3 ans d'ouverture puis après 5 ans et 7 mois d'ouverture. *(Arrondir au centimes près les résultats si nécessaire)*

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 2 et 3 p. 48.

II. Propriétés algébriques des fonctions exponentielles

Propriété 4.3 : ***Somme des puissances***

Pour tous nombres $a \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$a^{x+y} = a^x \times a^y.$$

Exemple 4.4 :

Soit $x \in \mathbb{R}$, écrire sous la forme a^x les nombres suivants :

1. $a^3 \times a^2$
2. $a^{-3} \times a^8 \times a$

Propriété 4.5 : ***Opposé des puissances***

Pour tous nombres $a \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Exemple 4.6 :

Soit $x \in \mathbb{R}$, écrire sous la forme a^x les nombres suivants :

1. $a^3 \times \dfrac{1}{a^2}$
2. $\dfrac{1}{a^{-3}} \times \dfrac{1}{a^8 \times a}$

Propriété 4.7 : ***Différence des puissances***

Pour tous nombres $a \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}.$$

Exemple 4.8 :

Soit $x \in \mathbb{R}$, écrire sous la forme a^x les nombres suivants :

1. $\dfrac{a^3}{a^{-2}} \times \dfrac{a^5}{a^2}$
2. $\dfrac{1}{a^{-3}} a^6 \times a$

Propriété 4.9 : Multiplication des puissances

Pour tous nombres $a \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$a^{n\,x} = (a^x)^n\,.$$

Exemple 4.10 :

Soit $x \in \mathbb{R}$, écrire sous la forme a^x les nombres suivants :

1. $\left(\dfrac{a^3}{a^{-2}}\right)^3 \times \left(\dfrac{a^5}{a^2}\right)^7$
2. $\left(\dfrac{1}{a^{-3}}a^6 \times a\right)^{-2}$

Propriété 4.11 : Résolution d'équation du type $x^n = y$

On considère un nombre $n \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{R}$.

La solution de l'équation $x^n = y$ est le nombre réel x tel que $x = y^{1/n}$.

On dit que cette solution x (la valeur obtenue) est la racine $n^{\text{ième}}$ de y.

Exemple 4.12 :

Résoudre les équations suivantes (en donnant une valeur arrondie au millième si nécessaire) :

1. $x^5 = 32$
2. $x^7 = 1876$

Propriété 4.13 : Taux moyen

On considère un taux d'évolution global sur n périodes t_{global}, le taux d'évolution moyen , noté t_{moyen}, sur ces n périodes est tel que :

$$\left(1 + \frac{t_{\text{moyen}}}{100}\right)^n = 1 + \frac{t_{\text{global}}}{100}$$

c 'est-à-dire :

$$1 + \frac{t_{\text{moyen}}}{100} = \left(1 + \frac{t_{\text{global}}}{100}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Méthode 4.14 : Calcul d'un taux moyen

Pour calculer un taux d'évolution moyen, on procède de la manière suivante :

1. On calcule le coefficient multiplicateur global CM (qui est égal à $1 + \dfrac{t_{\text{global}}}{100}$) ;
2. Le coefficient multiplicateur moyen est la racine $n^{\text{ième}}$ du coefficient multiplicateur global ;
3. On calcule le taux d'évolution associé au coefficient multiplicateur

Exemple 4.15 :

Entre 2011 et 2014, le prix du paquet de cigarette a fortement augmenté ; passant de 3,35 € en 2001 à 5 € en 2004.

Calculer alors le taux moyen annuel d'évolution du prix du paquet. Arrondir le résultat à 0,1% près.

Complément(s) :

Exercice résolu p. 45 « Calculer un taux moyen »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 1 à 4 p. 45

III. Etude des fonctions exponentielles

Propriété 4.16 : — ***Signe des fonctions exponentielles***

Pour tous nombres $a \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}$ on a $a^x > 0$.

Propriété 4.17 : Sens de variation des fonctions exponentielles de base a

Soit $a \in \mathbb{R}^+$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

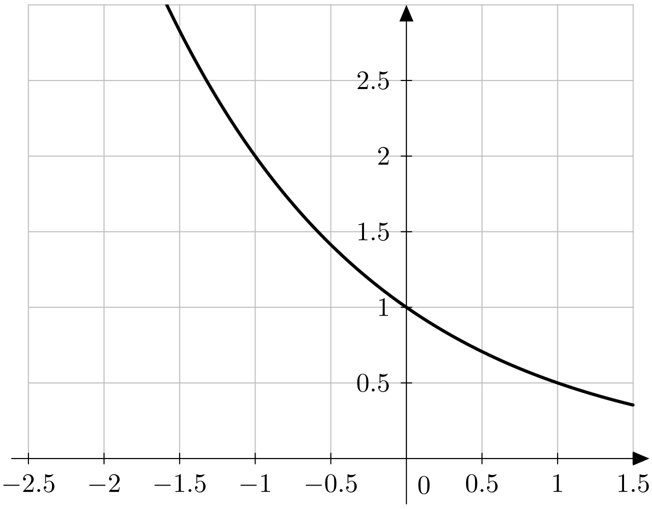
$$f(x) = a^x$$

Le sens de variation de la fonction f dépend du nombre a :

$0 < a < 1$

La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Une allure de la courbe est la suivante



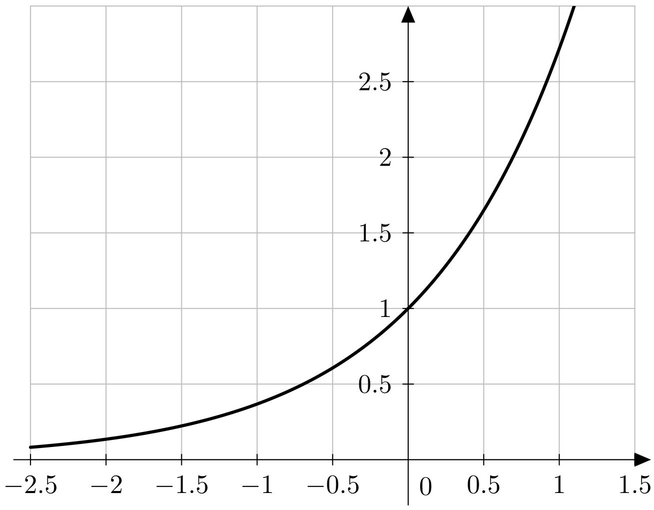
Le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
Var f		0

$a > 1$

La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Une allure de la courbe est la suivante



Le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
Var f	0	

Exemple 4.18 :

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3^x \qquad \text{et} \qquad g(x) = 0,75^x.$$

1. Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

Propriété 4.19 : ***Sens de variations de $x \longmapsto k \times a^x$***

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k \times a^x$, où $k \in \mathbb{R}$ est connu.

- Si $k > 0$, alors la fonction f est du même sens de variation que la fonction $x \longmapsto a^x$.
- Si $k < 0$, alors la fonction f est du sens de variation contraire à la fonction $x \longmapsto a^x$.

Complément(s) :

Exercice résolu p. 43 « Trouver le sens de variations des fonctions de la forme $k \longmapsto k \times a^x$ ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 1 à 3 p. 43 (« A ton tour ») et exercice 6 p. 48.

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 40 p. 52/53.