Chapitre 9
La fonction Exponentielle

Sommaire

Capacités :	**Exercices :**	**Bilan :**				
Transformer des expression avec l'exponentielle	11, 12, 53 et 55 p. 167 à 174					
Résoudre des équations et inéquations avec l'exponentielle	13, 54, 56, 57, 58 p. 168/174					
Etudier une fonction avec e^x	62, 63, 65 et 66 p.174/175					
Etudier une fonction avec e^{ax+b}	14, 15, 75 et 76 p. 168/176					

A l'instar de π, nous allons découvrir, dans ce chapitre, un nombre qui a intéressé les mathématiciens autant que le nombre π : le nombre e appelé constante d'Euler.
Tout comme $\pi \approx 3,141\,59$, on peut donner une valeur approché $e \approx 2,718\,28$.
Tout comme π, ce nombre e est un nombre irrationnel : il ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction de deux entiers : ce résultat fut démontré par EULER en 1739.
Tout comme π, ce nombre e n'est solution d'aucune équation polynômiale (on appelle ces nombres, des nombres transcendants) : ce résultat fut découvert par Charles HERMITE (mathématicien français 1822 à 1901) en 1873.
Le nombre e est un nombre pannumérique (nombre constitué de tous les chiffres avec ou sans le 0). Ce résultat fut démontré par R. SABEY et elle est juste jusqu'à plus de 10^{25} décimales :

$$e \approx \left(1 + 9^{-4^{6\times 7}}\right)^{3^{2^{85}}}.$$

I. Définition de la fonction exponentielle

Propriété 9.1 :

On considère une fonction f vérifiant le système suivant : $\begin{cases} f'(x) = f(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x)f(-x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$ et $f(x) \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Démonstration 9.2 :

On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

On pose la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = f(x)f(-x)$.

ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables.

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = f(-x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Comme $\phi'(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors la fonction ϕ $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

De plus, on a :

$$\phi(0) = \dots\dots\dots\dots \quad = \dots\dots\dots\dots$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :$\phi(x) = \dots\dots\dots$

C'est-à-dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{f(x)f(-x) = \dots\dots\dots}$$

Supposons maintenant qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

On a alors :

$$\phi(x_0) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Ceci est impossible puisque $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{f(x) \dots\dots\dots\dots}$$

Théorème 9.3 : ***Définition de la fonction exponentielle***

On considère le système suivant : $\begin{cases} f'(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

....

....

On note cette fonction ....

Démonstration 9.4 :

On souhaite démontrer l'existence d'une unique solution. On va donc procéder en deux étapes :

- **Existence :** l'existence d'une telle fonction est admise.
- **Unicité :** on suppose qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2 solutions du système :

$$\begin{cases} f'(x) = f(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : ...., ...et ....

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_1(x) \neq 0$, alors on peut définir sur $\mathbb{R}$ la fonction ψ par : $\psi(x) = \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}$.

ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (avec $f_1(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Comme $\psi'(x) = \ldots\ldots$, ψ est donc ....

De plus, comme $\psi(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\psi(x) = \ldots\ldots\ldots$

C'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)} = \ldots\ldots\ldots$

Comme $f_1(x) \neq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a ....

D'où l'unicité de la fonction solution.

II. Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Propriété 9.5 : ***Exponentielle d'une somme***

Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$, on a ....

Remarque 9.6 :

Il s'agit là de la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle : ....

....

....

Exemple 9.7 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer, en fonction de $\exp(x)$, $\exp(2x)$.

....

....

....

Propriété 9.8 : ***Exponentielle d'un opposé***

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a ....

Démonstration 9.9 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \iff \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\iff \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a ....

Propriété 9.10 : ***Exponentielle d'une différence***

Pour tous x et y dans $\mathbb{R}$, on a ....

Démonstration 9.11 :

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On note que $x = x - y + y$.

Ainsi, on a :

$$\exp(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \iff \exp(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\iff \frac{\exp(x)}{\exp(y)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{car } \exp(y) \neq \ldots.$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a : $\exp(x - y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriété 9.12 : ***Puissance d'une exponentielle***

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Démonstration 9.13 :

La démonstration est admise.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a : $\exp(nx) = \exp(\underbrace{x + \cdots + x}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{\exp(x) \times \cdots \times \exp(x)}_{n \text{ fois}} = \exp(x)^n$.

Remarque 9.14 :

En prenant $x = 1$ à la dernière propriété, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\exp(n) = \exp(1)^n$.

On pose $\exp(1) = e$.

e est le nombre d'Euler et, avec la calculatrice, on peut en donner une valeur approchée : $e \approx 2,718281$.

On peut alors noter que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\exp(n) = e^n$.

Ainsi, par extension aux réels, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\exp(x) = e^x$.

Il s'agit là d'une nouvelle notation.

Dorénavant, on écrira que la fonction exponentielle est définie par : $f(x) = e^x$.

On lit alors « e puissance x » ou « e exposant x ».

Exemple 9.15 :

Simplifier l'expression $\dfrac{e^{-4}}{e^3 \times (e^5)^4}$.

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Complément(s) :

Savoir-Faire 2 p. 167 « Utiliser une relation fonctionnelle ».

Complément(s) :

Vidéo « Appliquer les formules sur la fonction exponentielle »

Exercice(s) :

Exercices 11, 12, 53 et 55 p. 167 à 174.

III. Etude de la fonction exponentielle

Propriété 9.16 : Signe de la fonction exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a ....

Propriété 9.17 : Racine d'une exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a ....

Exemple 9.18 :

Etudier le signe de $-e^x(x^2 - 9)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Propriété 9.19 : Dérivabilité de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a ....

Exemple 9.20 :

Calculer la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = e^x + 3x^2 - 8$.

....

....

....

Complément(s) :

Vidéo « Dériver une fonction exponentielle »

Propriété 9.21 : Variations de la fonction exponentielle

....

....

Démonstration 9.22 :

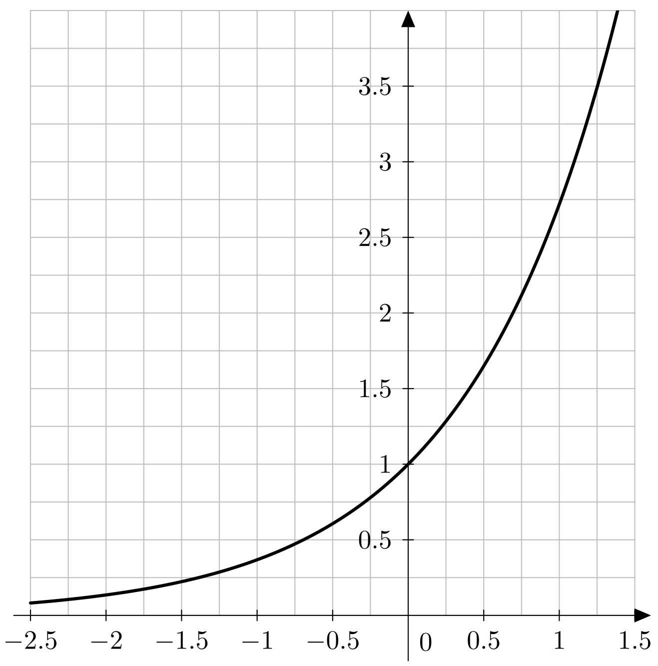
....

....

....

Remarque 9.23 :

On donne ci-dessous une illustration graphique de la fonction exponentielle.



On donne une équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisses 0, notée $\mathcal{T}_0$

....

....

....

....

On donne une équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisses 1, notée $\mathcal{T}_1$:

....

....

....

Complément(s) :

Savoir-Faire 1 p. 167 « Dériver un produit, un quotient ».

Complément(s) :

Vidéo « Etudier une fonction avec l'exponentielle »

Exercice(s) :

Exercices 62, 63 et 66 p. 174

Propriété 9.24 : Conséquences algébriques des variations

Soient x et y deux réels.

On a ....

De plus, on a ....

Propriété 9.25 : Antécédent(s) par la fonction exponentielle

Soit m un réel strictement positif.

....

....

Méthode 9.26 : Résoudre une équation avec l'exponentielle

La propriété précédente affirme donc qu'il existe un unique antécédent à m ($m > 0$) par la fonction exponentielle.

En pratique, pour trouver un antécédent à m, on utilisera la calculatrice et la touche : $\boxed{\ln}$ Il s'agit de la fonction « logarithme népérien » : fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Exemple 9.27 :

Résoudre les deux équations suivantes : $e^x = e^4$ et $e^x = 7$.

....

....

....

....

Remarque 9.28 :

Les deux dernières propriétés affirment que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a ....

Complément(s) :

Savoir-Faire 3 « Résoudre des équations ou inéquations ».

Complément(s) :

Vidéo « Résoudre une équation avec des exponentielles »

Complément(s) :

Vidéo « Résoudre une inéquation avec des exponentielles »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 13, 54, 56, 57, 58 et 61 p. 168 à 174.

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 65 p. 175

IV. Compléments sur la fonction exponentielle

Propriété 9.29 :

On considère deux réels a et b.

....

....

....

....

Exemple 9.30 :

Déterminer les variations de la fonction f définie par $f(x) = 9e^{-x+8}$.

....

....

....

....

....

....

....

Remarque 9.31 :

Il est notamment utile de connaitre le résultat suivant ....

Complément(s) :

Savoir-Faire 4 « Etudier les variations d'une fonction ».

Complément(s) :

Vidéo « Dériver une fonction exponentielle e^{kt} »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 14, 15, 75 et 76 p. 168 à 176.

Complément(s) :

Vidéo « Etudier une fonction exponentielle dans une situation concrète »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 107 et 111 p. 182/183.