Chapitre 6
Continuité et Applications

Sommaire

Capacités :	**Exercices :**	Non Acquis	Acquis
Etudier la continuité d'une fonction	31 & 33 p. 132/133		
Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires	36, 40, 39 & 67 p. 133 à 136		
Donner l'encadrement d'une solution d'une équation	39 & 67 p. 133 à 136		

Introduction

Bernhard BOLZANO (de 1781 à 1848) est un mathématicien et philosophe pragois. Il étudie la philosophie, la théologie et les mathématiques. Ses trois domaines de ses recherches sont : les fonctions, la logique et la notion de cardinalité.
Il est le premier mathématicien à démontrer le théorème des valeurs intermédiaires (sans son aspect géométrique). Il définit notamment la notion de continuité d'une fonction f en a par : $f(a+\delta)-f(a)$ peut être rendu suffisamment petit, plus petit que toute quantité strictement positive.

Une citation :

> « Les mathématiques sont la science qui traite des lois générales auxquelles les choses doivent se conformer dans leur essence. ».

I. Notion de continuité

1. Définition de la continuité

Définition 6.1 : ***Fonction continue au point a***

Une fonction f est continue en a si et seulement si f est définie sur un intervalle I ouvert contenant a et qu'on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

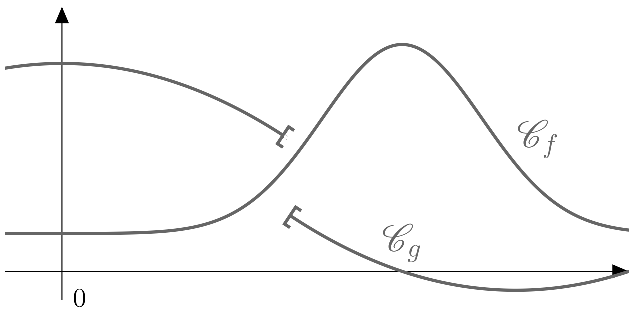
Définition 6.2 : ***Fonction continue sur un intervalle***

Une fonction f est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout point a de I.

Remarque 6.3 :

Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par le fait que sa courbe représentative peut être tracer sans lever le crayon sur cet intervalle.

La fonction f est continue, alors que la fonction g n'est pas continue.
On dit alors que la fonction g possède un point de discontinuité qui est représenté par un saut de sa courbe représentative.



Complément(s) :

Méthode 1 p. 119 « Etudier une fonction définie par morceaux ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 31 et 33 p. 132/133.

2. Etude de la fonction partie entière

Définition 6.4 : ***Fonction partie entière***

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier n tel qu'on a :

$$n \leqslant x < n + 1.$$

La fonction partie entière est la fonction E définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$E(x) = n.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut aussi noter $E(x) = \lfloor x \rfloor$.

Exemple 6.5 :

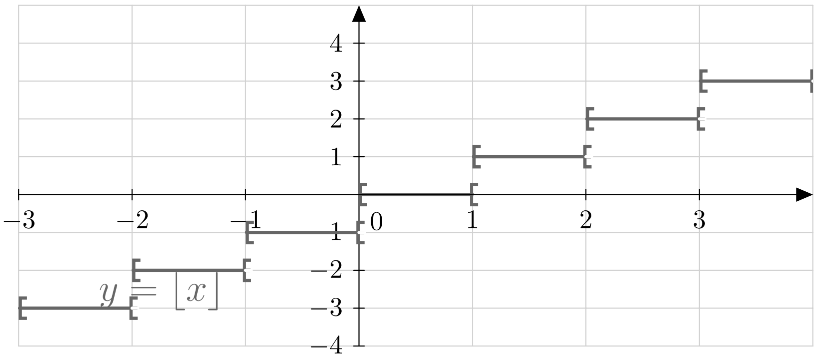
Calculons quelques images de réels par la fonction partie entière :

$$E(0,1) \qquad E(0,99) \qquad E(0,5)$$

$$E(3) \qquad E(3,00001) \qquad E(3,999) \qquad E(-0,001) \qquad E(-0,7) \qquad E(-3,6) \qquad E(-10,001)$$

Remarque 6.6 :

Graphiquement, la fonction partie entière est *une fonction en escalier.*
La représentation graphique de la fonction partie entière va se composer de segments (semi- ouverts) de la forme $[n; n+1[$.
On donne une représentation graphique de la fonction E ci-dessous :



Graphiquement, on voit que cette fonction n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.
Cependant, cette fonction partie entière est continue sur chaque intervalle de la forme $[n; n+1[$, où $n \in \mathbb{Z}$.
On peut montrer que la fonction partie entière n'est pas continue en 1. De manière plus générale, elle possède une discontinuité en chaque entier.

3. Propriétés

Théorème 6.7 :

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Remarque 6.8 :

La réciproque de ce théorème est fausse : toute fonction continue sur un intervalle I n'est pas forcément dérivable.
La fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable en 0.

Propriété 6.9 :

- Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$.
  Ainsi, les fonctions affines, carré et cubique sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynomiales) est continue sur son domaine de définition.
  Ainsi, la fonction inverse est continue sur $]-\infty; 0[$ et elle est continue sur $]0; +\infty[$.

Propriété 6.10 :

La fonction racine carré est continue sur $[0; +\infty[$.

Propriété 6.11 :

Toute fonction construite comme somme, produit, inverse, quotient ou composée à partir des fonctions de référence est continue sur l'intervalle où elle est définie.

Exemple 6.12 :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + x^3$ est continue car polynomiale.

II. Continuité et Equations

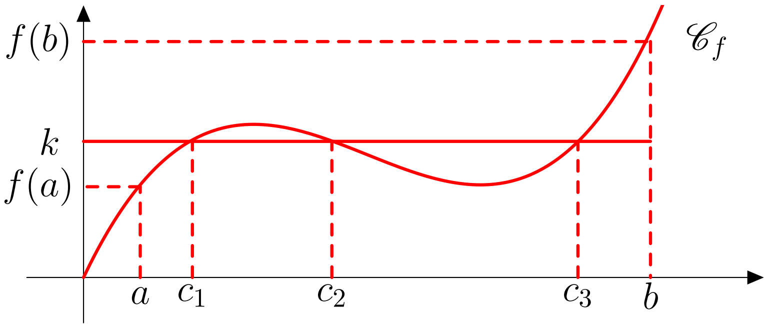
1. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 6.13 : — Théorème des valeurs intermédiaires

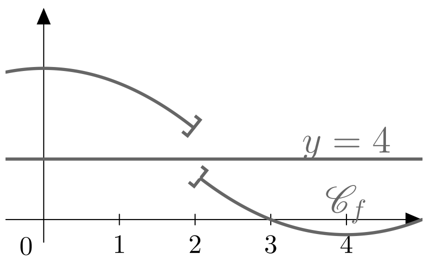
On considère une fonction f définie sur un intervalle I et deux réels a et b de I tels que :

- f continue sur I
- k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$

Alors, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c dans $[a; b]$.



Remarque 6.14 :



L'hypothèse de continuité est primordiale.

Dans cet exemple, comme la fonction f n'est pas continue sur $[0; 5]$, l'équation $f(x) = 4$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

Complément(s) :

Méthode 1 p. 121 « Prouver l'existence d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$ ».

Exemple 6.15 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 12$.
Montrer que, sur l'intervalle $[0; 4]$, l'équation $f(x) = -10$ admet au moins une solution.

Remarque 6.16 :

- On remarque que le théorème des valeurs intermédiaires, justifie l'existence de solutions, mais en aucun cas, il justifie le nombre de solutions présentes sur l'intervalle considéré. Dans le cas où l'équation $f(x) = k$ admet des solutions sur un intervalle, on en sait donc pas si la solution est unique, s'il y en a 2, ou 3, ou plus.
- L'unicité d'une solution sera justifié par une hypothèse supplémentaire à ce théorème : la stricte monotonie de la fonction f sur cet intervalle, comme l'énonce le théorème suivant.

Théorème 6.17 : Théorème de la bijection

On considère deux nombres réels a et b dans I avec $a < b$ et f une fonction définie sur I. Si :
- f est continue sur $[a; b]$,
- f strictement monotone (strictement croissante ou strictement décroissante) sur $[a; b]$,
- k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Alors, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution c dans l'intervalle $[a; b]$.

Remarque 6.18 :

Le théorème précédent est un corollaire (conséquence directe) du Théorème des valeurs intermédiaires.

Complément(s) :

Méthode 2 p. 121 « Prouver l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$ ».

Exemple 6.19 :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^3 + 12x - 1$.
Montrer que $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-20; -2]$.

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 36 et 40 p. 133.

Théorème 6.20 : Théorème de Bolzano

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a; b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[a; b]$.

2. Application aux suites

Propriété 6.21 :

On considère une fonction f continue sur un intervalle I, $\ell \in I$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in I$.
Si la suite (u_n) converge vers ℓ alors $f(u_n)$ converge vers ℓ.

Complément(s) :

Méthode 2 p. 119 : « Calculer la limite d'une suite dfinie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 35 p. 133.

3. Approximation d'une solution

Remarque 6.22 :

Dans cette sous partie, on souhaite donner des valeurs approchées d'un nombre α, solution de l'équation $f(x) = k$ sur un intervalle $[a; b]$.
Pour simplifier la suite de l'étude, on se ramène à une équation du type $f(x) = 0$ (pour une équation du type $f(x) = k$, on peut se ramener, en définissant la fonction g par $g(x) = f(x) - k$ à une équation du type $g(x) = 0$).

Méthode par balayage

L'objectif de cette partie est de donner un encadrement à 10^{-p} près de la solution, notée α, de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a; b]$.

On effectue alors la méthode suivante :

Etape 1 : on balaie l'intervalle $[a; b]$ avec un pas de 1. On obtient les sous intervalles suivants : $[a; a+1]$, $[a+1; a+2]$, ..., $[b-2; b-1]$ et $[b-1; b]$.
On cherche alors un intervalle de longueur 1 contenant α.
On va alors regarder, dans un premier temps, si α se trouve dans l'intervalle $[a; a+1]$. Pour se faire, on calcule $f(a)$ et $f(a+1)$ et on distingue alors deux cas :
- $f(a)$ et $f(a+1)$ sont de signes opposés : α se trouve dans cet intervalle.
  On passe alors à l'étape 2.
- $f(a)$ et $f(a+1)$ sont de même signes : on regarde si α se trouve dans l'intervalle suivant : $[a+1; a+2]$.
  On recommence ce même procédé tant qu'on n'a pas trouvé deux images consécutives de signes opposés.

On obtient à la fin de cette étape un intervalle de la forme $[n; n+1]$ parmi les sous intervalles donnés plus haut.

Etape 2 : on balaie l'intervalle trouvé à l'étape précédente $[n; n+1]$ avec un pas de $0,1$. On obtient alors les sous intervalles suivants : $[n; n+0,1]$, $[n+0,1; n+0,2]$, ..., $[n+0,8; n+0,9]$ et $[n+0,9; n+1]$.
On cherche alors un intervalle de taille 10^{-1} contenant α.
On procède de la même manière qu'à l'étape précédente, à savoir : on calcule $f(n)$, $f(n+0,1)$, ... et

on s'arrete dès qu'on trouve deux images consécutives $f(p)$ et $f(q)$ de signes opposés.
La solution α se trouve alors dans l'intervalle $[p, q]$ (de longueur $0,1$).

Etapes suivantes : Ainsi de suite, jusqu'à l'étape $p+1$ où l'intervalle recherché sera de taille 10^{-p}.

On peut alors donner un algorithme qui détaille la méthode décrite précédemment.
On considère les nombres a, b et p connus ainsi que la fonction f connue.
L'algorithme, écrit en langage naturel, est le suivant :

Pour k allant de 0 à p faire :
- Tant que $f(a) \times f(a+10^{-k}) > 0$ faire :
  - $a \longleftarrow a + 10^{-k}$
- Fin Tant que
- $k \longleftarrow k+1$

Fin Pour

Exemple 6.23 :

On considère la fonction f définie sur $[0; 3]$ par :

$$f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 7.$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; 3]$, notée α, puis donner un encadrement à 10^{-2} près de cette solution.

Méthode par dichotomie

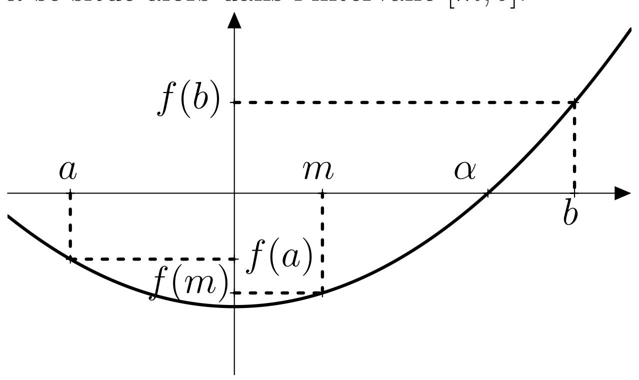
L'objectif de cette partie est de donner un encadrement à ε près de la solution, notée α, de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a; b]$.

On effectue alors la méthode suivante :

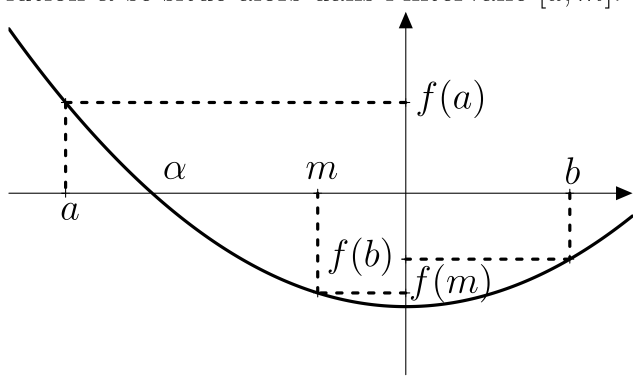
On découpe l'intervalle $I = [a; b]$ en deux sous intervalles de même amplitude.

Pour se faire, on utilise le milieu de $[a; b]$ qui est $m = \dfrac{a+b}{2}$.
On obtient ainsi deus sous-intervalles $[a; m]$ et $[m; b]$.
On calcule alors $f(m)$ et on compare son signe à celui de $f(a)$.
Vient alors deux cas :

- $f(a)$ et $f(m)$ sont de même signe et la solution α se situe alors dans l'intervalle $[m; b]$.



- $f(a)$ et $f(m)$ ont des signes contraires et la solution α se situe alors dans l'intervalle $[a; m]$.



On réitère ce procédé en remplaçant l'intervalle $[a; b]$ par l'un des deux intervalles précédemment trouvé ($[a; m]$ ou $[m; b]$), autant de fois que nécessaire, jusqu'à l'obtention d'un intervalle d'amplitude souhaitée.

On peut alors donner un algorithme qui détaille la méthode décrite précédemment.
On considère les nombres a, b et p connus ainsi que la fonction f connue.

L'algorithme, décrit en langage naturel, est le suivant :

```
Tant que |b − a| > ε faire :
    m ⟵ (a + b)/2
    Si f(m) × f(a) > 0 faire :
        a ⟵ m
    Sinon :
        b ⟵ m
Fin Tant Que
```

Exemple 6.24 :

On considère la fonction f définie sur $[0;3]$ par :

$$f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 7.$$

En utilisant la méthode de dichotomie, donner un encadrement à 10^{-3} près de la solution comprise entre 0 et 3.

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 39 et 67 p. 133/136.