Chapitre 13
Produit Scalaire dans l'Espace

Sommaire

Capacités :	**Exercices :**	Non Acquis	Acquis
Justifier l'orthogonalité de deux droites ou deux plans			
Déterminer une équation cartésienne d'un plan			
Déterminer un vecteur normal à un plan			
Calculer un produit scalaire			
Calculer la distance d'un point à une droite/ un plan			

Introduction

Giovanni Domenico CASSINI (de 1625 à 1712) est un enseignant franco-italien dont les découvertes sont nombreuses notamment en astronomie. Il dirige notamment l'Observatoire de Paris et découvre 4 satellites de Saturne et observe les trajectoires des planètes. Il s'oppose à KEPLER au sujet des trajectoires elliptiques des planètes. Il les décrit comme des ovales qui portent aujourd'hui son nom. L'étude de ces courbes l'amène à différents travaux en géométrie.

I. Produit scalaire de deux vecteurs

1. La formule des normes

Définition 13.1 : du produit scalaire

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$, le nombre réel défini par :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}||^2+||\overrightarrow{v}||^2-||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2\right)$$

Remarque 13.2 :

Soient A, B et C trois points de l'espace tels que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$, on a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$$

Théorème 13.3 :

On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$.

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.

On a alors :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=xx'+yy'+zz'$$

Cette forme est l'expression analytique du produit scalaire.

Exemple 13.4 :

Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-3\\5\\0\end{pmatrix}$. Calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$

Propriété 13.5 :

1. Le produit scalaire de deux vecteurs est **symétrique** :
   Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a :
   $$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$$
2. Le produit scalaire de deux vecteurs est **bilinéaire** :
   Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ et pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a :
   (a) $(\lambda\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v}=\lambda\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
   (b) $\overrightarrow{u}\cdot(\lambda\overrightarrow{v})=\lambda\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
   (c) $\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$
   (d) $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$

Propriété 13.6 :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

1. $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$ soit $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$
2. $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$ soit $||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$
3. $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$ soit $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$

Remarque 13.7 :

La première égalité nous donne une nouvelle expression du produit scalaire en fonction des normes :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 8 et 10 p. 360

2. La formule du cosinus

Théorème 13.8 : ***formule du cosinus***

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$. Alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos\theta$$

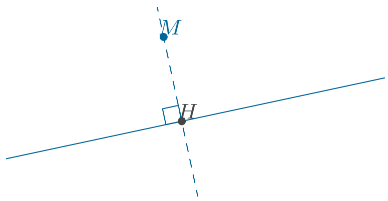
Propriété 13.9 :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$.

3. La formule du projeté orthogonal

Définition 13.10 : ***Projeté orthogonal***

Le projeté orthogonal d'un point M, noté H, sur une droite (d) est le point d'intersection de la droite (d) et de la droite perpendiculaire à (d) passant par le point M.



Théorème 13.11 : Formule du projeté orthogonal

Soient A, B, C et D quatre points d'un même plan (A et B étant distincts) et soient H et K les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB). Alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HK} = \begin{cases} AB \times HK & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{HK} \text{ sont de meme sens} \\ -AB \times HK & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{HK} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

Complément(s) :

Méthode 1 « Calculer des produits scalaires dans l'espace » et Méthode 2 « Utiliser les propriétés du produit scalaire » p. 345.

II. Orthogonalité

1. Vecteurs orthogonaux

Définition 13.12 : l'orthogonalité de deux vecteurs

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace, et soient A, B et C trois points de l'espace tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Remarque 13.13 :

La notion de perpendicularité ne s'applique qu'à des droites et des plans, alors que la notion d'orthogonalité s'applique à des plans, des vecteurs ou des droites.
Deux droites sont dites perpendiculaires lorsque elles sont sécantes et que l'angle formé en ce point d'intersection est un angle droit.
Deux droites sont dites orthogonales signifie qu'il existe une parallèle de l'une qui est perpendiculaire à la seconde.
Pour noter que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, on utilisera la même notation que pour les droites :

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}.$$

Propriété 13.14 :

On considère $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.
Autrement dit,

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0.$$

Remarque 13.15 :

Par convention, le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est orthogonal à tout vecteur de l'espace.

Propriété 13.16 :

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$.

On a :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' + zz' = 0.$$

Exercice(s) :

Exercice 5 p. 360

2. Droites orthogonales

Définition 13.17 : 2 droites orthogonales / perpendiculaires

Deux droites d et d' sont dites perpendiculaires si et seulement si d et d' se coupent perpendiculairement (les droites d et d' sont donc sécantes).
Deux droites d et d' sont dites orthogonales si et seulement si il existe une droite d'' tels que d est parallèle à d'' et d'' perpendiculaire à d'.

Exemple 13.18 :

On considère le cube $ABCDEFGH$.
Donner deux droites qui sont perpendiculaires et deux droites orthogonales (sans être perpendiculaires).

Remarque 13.19 :

Pour écrire que deux droites d et d' sont orthogonales dans l'espace, on écrira :

$$d \perp d'$$

Propriété 13.20 :

Deux droites d et d' sont orthogonales si et seulement si tout vecteur directeur de d est orthogonal à tout vecteur directeur de d'.

Propriété 13.21 :

Si deux droites sont parallèles entre elles, alors toute droites orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

Complément(s) :

Méthode 1 p. 347 « Montrer que deux droites sont orthogonales ».

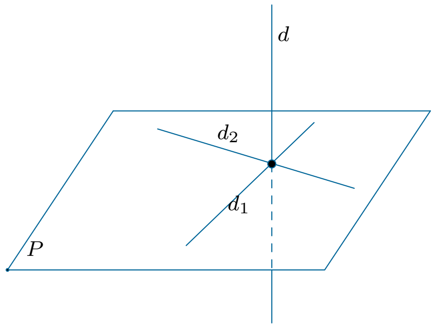
Exercice(s) :

Exercices 28 p. 363 (dans le cas où les droites sont orthogonales, préciser si elles sont perpendiculaires ou non) et 36 p. 364.

3. Orthogonalité entre une droite et un plan

Définition 13.22 : ***Droite perpendiculaire à un plan***

Une droite d est perpendiculaire à un plan P si et seulement si il existe deux droites sécantes de P qui sont perpendiculaires à d.



Complément(s) :

Méthode 1 p. 347 « Démontrer l'orthogonalité d'une droite et d'un plan ».

Exemple 13.23 :

ff

Définition 13.24 : ***Vecteur normal à un plan***

Un vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan P si et seulement si toute droite de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ est orthogonale au plan P.

Exercice(s) :

Exercice 27 p. 362

Propriété 13.25 :

Le plan P passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0.$$

Exemple 13.26 :

A quelle(s) condition(s) le point $M(x;y;z)$ appartient-il au plan passant par $A(3;-7;-1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}$?

Donner alors les coordonnées d'un point M_1 n'appartenant pas à ce plan et donner les coordonnées d'un point M_2 appartenant à ce plan.

Théorème 13.27 :

Une droite d est orthogonale à un plan P si et seulement si il existe deux droites sécantes de P qui sont orthogonales à d.

Théorème 13.28 :

L'équation cartésienne d'un plan P est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } a,\ b,\ c \text{ et } d \text{ non tous nuls.}$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan.

Remarque 13.29 :

L'équation cartésienne n'est pas unique. On peut toujours multiplier les coefficients de l'équation cartésienne par une même constante.
En effet, il n'existe pas un unique vecteur normal mais une infinité qui sont tous colinéaires entre eux.

Exemple 13.30 :

Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par $A(1; -2; 5)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Complément(s) :

Méthode 1 « Déterminer une équation cartésienne d'un plan » et Méthode 2 « Déterminer un vecteur normal à un plan défini par une équation cartésienne » p. 381.

✎ Exercice(s) :

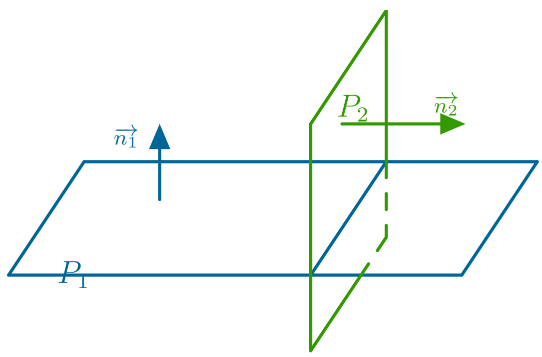
Exercices 33, 34 et 36 p. 393

4. Plans perpendiculaires

Définition 13.31 : — Plans perpendiculaires

On considère deux plans P_1 et P_2 de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$.
Les plans P_1 et P_2 sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux.

$$P_1 \perp P_2 \iff \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}.$$



✎ Exercice(s) :

Exercices 28, 30 à 32 p. 392/393.

III. Distance d'un point ...

1. ... sur un plan

Complément(s) :

Méthode 2 p. 351 « Calculer la distance d'un point à un plan ».

2. ... sur une droite