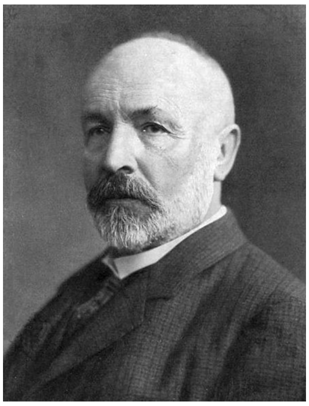
Chapitre 9
Equations différentielles

Sommaire

Capacités :	**Exercices :**	Non Acquis	Acquis
Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle	37 p. 229		
Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$	21, 22 et 25 p. 228		
Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$	30, 32 et 33 p. 228/229		
Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + f$	39, 67 et 68 p. 229/233		

Introduction



Le concept d'infini a obsédé plusieurs siècles de mathématiciens et ce, depuis l'Antiquité.
GAUSS (1777 à 1855), appelé par certains le « prince des mathématiques », est l'un des premiers mathématiciens à vouloir construire ce concept de manière rigoureuse et précise.
CANTOR quant à lui étudia et donna un nom au nombre d'éléments de $\mathbb{N}$ (qui est infini) : $\aleph_0$.
En travaillant sur la parité des entiers, il en déduit que $2\aleph_0 = \aleph_0$.

I. Introduction aux équations différentielles

Définition 9.1 : Equation différentielle

Une équation différentielle est une relation entre une variable (x ou t en général), une fonction f dépendant de cette variable et un certain nombre de ses dérivées successives (f', f'', ...).
Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction (en général, on note cette inconnue y).
Résoudre une telle équation signifie déterminer toutes les fonctions qui satisfont cette relation.

Exemple 9.2 :

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x^2\, y'' - 2\, y + 2x = 0.$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + x.$$

Vérifier que la f est une solution de l'équation (E).

Complément(s) :

Méthodes 1 p. 213 « Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle » et 1 p. 217 « Vérifier qu'une fonction est solution particulière d'une équation différentielle ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 37 p. 229

II. L'équation différentielle $y' = ay$

Théorème 9.3 :

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' = ay \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions f_k définies par :

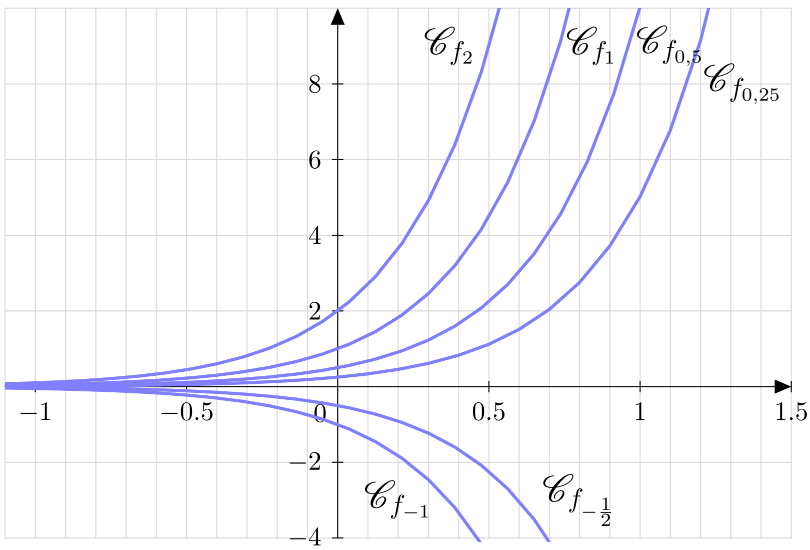
$$f_k(x) = k\, e^{ax}, \quad k \in \mathbb{R}\ .$$

Remarque 9.4 :

- L'équation $y' = ay$ admet donc une infinité de solutions (puisqu'on a une infinité de choix pour la constante k).
- Toutes les équations $(E) : y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$ admettent la fonction nulle comme solution.
  Il s'agit de la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$.
- Lorsque $a = 0$, l'équation (E) devient $y' = 0$.
  Les solutions de cette équation sont alors toutes les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = k$.
- La constante k peut être égale à 0. Dans ce cas, la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = 0$, appelée fonction nulle, est une solution évidente de l'équation $y' = a\,y$.

Remarque 9.5 :

On considère l'équation différentielle suivante $\quad (E) : y' = 3y$.
Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions f_k définies par $\quad f_k(x) = k\,e^{3x}, \quad k \in \mathbb{R}$.
On peut alors représenter quelques unes de ces solutions (ici f_1, f_2, f_{-1} et $f_{-\frac{1}{2}}$) par le graphique suivant :



Exemple 9.6 :

Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation suivante :

$$y' = -\frac{1}{2}\,y.$$

✎ *Exercice(s) :*

Exercices 21 et 22 p. 228

III. L'équation différentielle $y' = ay + b$

Définition 9.7 : Equation différentielle du premier ordre

Soient a et b deux réels où $a \neq 0$.
Une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants est une équation différentielle équivalente à l'équation différentielle suivante :

$$y' = ay + b.$$

Remarque 9.8 :

Les équations du type $y' = ay$ sont des équations différentielles du premier ordre où $b = 0$.

Propriété 9.9 :

Soient a et b deux réels où $a \neq 0$.
On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' = ay + b.$$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution particulière de cette équation (E).

Démonstration 9.10 :

Soient a et b deux réels où $a \neq 0$.
Soit f la fonction constante sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = -\frac{b}{a}.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = 0.$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} af(x) + b &= a \times \frac{-b}{a} + b \\ &= -b + b \\ &= 0 \\ &= f'(x). \end{aligned}$$

La fonction f ainsi définie est bien solution de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + b$. $\square$

Exemple 9.11 :

On considère l'équation différentielle du premier ordre suivante : $(E) : y' = -3y + 6.$
Déterminer une solution particulière et constante de l'équation (E).

Propriété 9.12 :

Soient a et b deux réels où $a \neq 0$.
On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' = ay + b.$$

Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = g(x) - \frac{b}{a},$$

où g est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

Démonstration 9.13 :

Soient a et b deux réels où $a \neq 0$.
On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E) : y' = ay + b \qquad \text{et} \qquad (E_0) : y' = ay.$$

- Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle (E_0).
  Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

  $$g'(x) = a\,g(x).$$

  On considère alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

  $$f(x) = g(x) - \frac{b}{a}.$$

  Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

  $$g(x) = f(x) + \frac{b}{a}.$$

  Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

  $$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \\ &= a\,g(x) \\ &= a\left(f(x) + \frac{b}{a}\right) \\ &= a\,f(x) + b. \end{aligned}$$

  Finalement, f est solution de l'équation différentielle (E).

- Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle (E).
  On sait aussi que la fonction constante f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :

  $$f_0(x) = -\frac{b}{a}.$$

  Ainsi, on montre que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

  $$g(x) = f(x) - f_0(x)$$

  est solution de l'équation différentielle (E_0).
  En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

  $$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - f_0'(x) \\ &= f'(x) \\ &= a\,f(x) + b \\ &= a\,\left(g(x) + f_0(x)\right) + b \\ &= a\,g(x) + a\,f_0(x) + b \\ &= a\,g(x) - b + b. \\ &= a\,g(x). \end{aligned}$$

  Ainsi, g est bien solution de l'équation différentielle (E_0) et f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

  $$f(x) = g(x) - \frac{b}{a},$$

  où g est solution de l'équation différentielle (E_0).

$\square$

Propriété 9.14 :

Soient a et b deux réels où $a \neq 0$.
On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' = ay + b.$$

Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions f_k définies par :

$$f_k(x) = k\, e^{ax} - \frac{b}{a}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Méthode 9.15 : — Résoudre une équation de la forme $y' = ay + b$.

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre, on procède de la manière suivante :

1. On se ramène à une équation du type :

$$(E) : y' = ay + b.$$

2. On détermine la fonction constante f_0 solution de l'équation (E).
3. On détermine l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(E_0) : y' = a\, y.$$

Ce sont les fonctions g_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_k(x) = k\, e^{ax}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

4. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est la somme de la fonction constante f_0 et des solutions g_k solutions de (E_0).

Exemple 9.16 :

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E) : 2y' + 6y = 12.$$

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 30 et 33 p. 228/229.

IV. L'équation différentielle $y' = ay + f$

Théorème 9.17 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E) : y' = ay + f \qquad \text{et} \qquad (E_0) : y' = ay \qquad a \in \mathbb{R}.$$

On note g_p une solution particulière de l'équation E.
Les solutions de l'équation (E_0) sont les fonctions g_k définies par :

$$g_k(x) = k\, e^{a\,x}, \quad k \in \mathbb{R}\ .$$

Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions f_k s'écrivant comme somme de la fonction particulière g_p et des fonction f_k solutions de l'équation E_0. Elles sont définies sur I par :

$$f_k(x) = g_p(x) + g_k(x), \quad k \in \mathbb{R}\ .$$

Méthode 9.18 : — Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + f$.

Pour résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + f$ dont on connait une solution particulière g_p, on procède de la manière suivante :

1. On vérifie que g_p est une solution de l'équation différentielle $y' = ay + f$.
2. On détermine l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y' = a\, y.$$

   Ce sont les fonctions g_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_k(x) = k\, e^{ax}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

3. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ est l'ensemble des fonctions f_k s'écrivant comme somme de la fonction particulière g_p et des fonction f_k (solutions de l'équation différentielle $y' = ay$).
   Elles sont définies sur I par :

$$f_k(x) = g_p(x) + g_k(x), \quad k \in \mathbb{R}\ .$$

Exemple 9.19 :

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' - 2y - e^x = 0.$$

1. Rechercher une solution particulière de (E) qui s'écrit sous la forme $g_p(x) = \lambda\ e^x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ à déterminer.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$.
3. En déduire l'ensemble des fonctions solution de l'équation (E).

Complément(s) :

Méthode 2 p. 217 « Résoudre des équations différentielles ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 67 et 68 p. 229/233.

V. Problème de Cauchy

Définition 9.20 : — Problème de Cauchy

On appelle problème de Cauchy, un système constitué d'une équation différentielle (ici de la forme $y' = ay + f$, où f est une fonction) et d'une condition initiale $y(x_0) = y_0$.
On le note :

$$\begin{cases} y' = a\,y + f \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Propriété 9.21 :

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant : $\begin{cases} y' = a\,y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.
Ce problème de Cauchy admet une unique solution, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = y_0\, e^{a(x-x_0)}.$$

Méthode 9.22 : — Résoudre un problème de Cauchy

On considère le problème de Cauchy : $\begin{cases} y' = a\,y + f \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.
Pour résoudre le problème précédent, on peut procéder de deux manières différentes :

- Dans un premier temps, on résout l'équation différentielle $y' = ay + f$.
- Dans un second temps, on utilise la condition initiale $y(x_0) = y_0$ pour déterminer la valeur de k en résolvant une équation.

Exemple 9.23 :

Déterminer la fonction f solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = 2\,y \\ y(2) = 2 \end{cases}.$$

Remarque 9.24 :

La fonction exponentielle est la solution du problème de Cauchy suivant : $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Complément(s) :

Méthode 3 p. 217 « Résoudre une équation différentielle avec une condition initiale ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 25, 32 et 39 p. 228/229