Chapitre 5
Combinatoire & Dénombrement

Sommaire

Capacités :	**Exercices :**	Non Acquis	Acquis
Utiliser les principes additif et multiplicatif	3, 4, 5 & 8 p. 292/293		
Dénombrer avec des listes, arrangements ou permutations	14, 15, 21, 25 et 26 p. 293/294		
Dénombrer avec des combinaisons	34, 41 et 42 p. 295		

Introduction

Blaise PASCAL (de 1623 à 1662) mathématicien français, s'intéresse à la conception et la fabrication d'une machine à calculer, et se tourne très jeune vers la géométrie avant de se détourner des sciences et de se consacrer à la religion.
Il revient aux mathématiques dans les 10 dernières années de sa vie et s'intéresse au « Triangle arithmétique ».
Une anecdote :

> Le 20 novembre 1654, tombe en extase pour la théologie et abandonne totalement les sciences.
> Un soir de l'année 1658, pris par un mal de tête, il se met à réfléchir à la cycloide. Ses souffrances disparaissant aussitôt, il en conclut que Dieu lui indiquait que les mathématiques faisait partie de sa vie.

I. Factorielle d'un entier

Définition 5.1 : ***Factorielle n***

On appelle *factorielle* n, pour $n \in \mathbb{N}$, le nombre noté $n!$ tel que :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n.$$

Par convention, $0! = 1$.

Exemple 5.2 :

Calculer $3!$ et $5!$.

Exemple 5.3 :

Ecrire une fonction python `factorielle` qui prend en argument un entier n et qui renvoie $n!$.

Propriété 5.4 :

On considère un entier naturel n.
On a alors :

$$(n+1)! = n! \times (n+1).$$

Exemple 5.5 :

Connaissant $5!$, calculer $7!$.

Propriété 5.6 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{(n+1)!}{n!} = n+1.$$

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 28 et 30 p. 294.

II. Les principes du dénombrement

Définition 5.7 : ***Cardinal d'un ensemble***

On considère un ensemble fini E.
On appelle cardinal de E, noté $\mathrm{Card}(E)$, le nombre d'éléments de cet ensemble.

Exemple 5.8 :

On note E l'ensemble des nombres entiers présents sur un dé cubique.
Déterminer l'ensemble E et donner son cardinal.

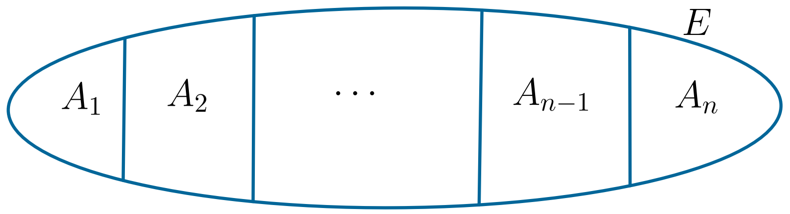
1. Le principe additif

Définition 5.9 : ***Partition d'un ensemble***

On considère A_1, A_2, ..., A_n ($n \in \mathbb{N}^*$) des ensembles vérifiant les conditions suivantes :

- ils sont non vide :
$$\text{pour tout } 1 \leq i \leq n, \quad \text{Card}(A_i) \neq \emptyset;$$
- ils sont deux à deux disjoints :
$$\text{pour tout } 1 \leq i \leq n \text{ et pour tout } 1 \leq j \leq n,\ i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset;$$
- leur réunion est égale à E :
$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E.$$

On a alors le schéma suivant :



On dit alors que A_1, A_2, ..., A_n forment une partition de E.

Propriété 5.10 : ***Principe additif***

On considère une partition A_1, A_2, ..., A_p d'un ensemble fini E.
On a alors :
$$\text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_p) = \text{Card}(E).$$

Exemple 5.11 :

On considère une grille carrée de 4 sur 4.
Déterminer à l'aide de ce principe additif le nombre de carrés formés par cette grille.

Propriété 5.12 :

On considère deux sous-ensembles A et B d'un ensemble fini E.

- On a :
$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$
- Si A et B sont disjoints (c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$), alors on a :
$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$
- On a :
$$\text{Card}(E) = \text{Card}(A) + \text{Card}(\overline{A})$$

Exemple 5.13 :

Dans le lycée comptant 137 Terminales Générales, 34 élèves suivent la spécialité Mathématiques et 45 élèves suivent la spécialité SES et 66 élèves ne suivent aucune de ces deux spécialités. Combien d'élèves de Terminales Générales suivent à la fois la spécialité Mathématiques et la spécialité SES ?

2. Le principe multiplicatif

Remarque 5.14 :

Dans une situation comportant p étapes offrant respectivement n_1, n_2, ..., n_p possibilités, le nombre total d'issues est donné par :

$$n_1 \times n_2 \times ... \times n_p.$$

Exemple 5.15 :

Combien y-a-t'il de codes possibles dans un code comportant deux lettres distinctes puis un chiffre ?

Définition 5.16 : ***Produit cartésien***

Le produit cartésien de p ensemble E_1, E_2, ..., E_p est noté $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ représente l'ensemble des p-uplets $(e_1; e_2; ...; e_p)$ où $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$, ..., $e_p \in E_p$.

Remarque 5.17 :

Un 2-uplet est appelé couple et un 3-uplet est appelé triplet.

Complément(s) :

Méthode 2 p. 277 : « Déterminer des produits cartésiens ».

Propriété 5.18 : ***Principe multiplicatif***

On considère p ensembles finis E_1, E_2, ..., E_p.
On a alors :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times .... \times E_p) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times ... \times \text{Card}(E_p).$$

Exemple 5.19 :

Pour les véhicules français, une plaque d'immatriculation est composée d'un mot de deux lettres suivi d'un nombre compris entre 0 et 999 puis d'un mot de deux lettres.
Combien peut-on immatriculer de véhicules en utilisant ce système de numérotation ?

Complément(s) :

Méthode 1 p. 277 : « Utiliser les principes additif et multiplicatif ».

✎ Exercice(s) :

Exercices 3, 4, 5, 8 et 13 p. 292/293

Complément(s) :

La vidéo « Appliquer le principe multiplicatif pour dénombrer ».

III. Dénombrement des p-listes

Définition 5.21 : ***p-liste***

On considère un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de cardinal n.
Une p-liste (ou liste de longueur p) de E est un p-uplet d'éléments de E.

Remarque 5.22 :

une p-liste est donc un élément du produit cartésien $E^p = \underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{p \text{ fois}}$.

Exemple 5.23 :

- Soit $E = [\![0; 20]\!] = \{0; 1; 2; \ldots; 20\}$.
  Par exemple, une 3-liste est $(1; 20; 12)$ et une 5-liste est $(0; 1; 0; 20; 10)$.
- Soit E l'ensemble des lettres de l'alphabet, i.e. $E = \{a; b; \ldots; z\}$.
  Un 4-liste est par exemple $(p; a; p; e)$ ou $(p; r; o; f)$.

Remarque 5.24 :

Une 0-liste existe : il s'agit de la liste qui ne comporte aucun élément.

Théorème 5.25 :

On considère un ensemble E de cardinal fini n $(\text{Card}(E) = n)$.
Le cardinal de l'ensemble E^p des p-listes de E est n^p, c'est-à-dire :

$$\text{Card}\left(E^p\right) = n^p.$$

Exemple 5.26 :

Combien y-a-t'il de numéros de téléphones portables commençant par 06 ?

Complément(s) :

Méthode 1 p. 279 : « Dénombrer des k-uplets d'un ensemble fini ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 14, 15, 21, 25 et 26 p. 293/294.

Complément(s) :

La vidéo « Dénombrer le nombre de p-uplets d'un ensemble ».

IV. Dénombrement des arrangements et permutations

Définition 5.28 : ***Arrangement***

On considère un ensemble E de cardinal fini n ($\text{Card}(E) = n$) et p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
Un p-arrangement (ou arrangement de p éléments) est une p-liste d'éléments **distincts** de E.

Exemple 5.29 :

Soit E l'ensemble des lettres de l'alphabet, i.e. $E = \{a; b; ...; z\}$.
$(p; a; p; e)$ n'est pas un 4-arrangement de E alors que $(p; r; o; f)$ est un 4-arrangement de E.

Théorème 5.30 :

On considère un ensemble E de cardinal fini n ($\text{Card}(E) = n$) et p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E, noté A_n^p, est :

$$A_n^p = n(n-1)...(n-p) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Remarque 5.31 :

Par convention, on a :

$$A_n^0 = 1.$$

Exemple 5.32 :

Ecrire une fonction python `Arrangement` qui prend en arguments n et p et qui renvoie la valeur de l'arrangement A_n^p.

Complément(s) :

Méthode 2 p. 279 : « Dénombrer des k-uplets d'éléments distincts ».

Complément(s) :

La vidéo « Dénombrer en utilisant les arrangements ».

Définition 5.34 : ***Permutation***

On considère un ensemble E de cardinal fini n ($\text{Card}(E) = n$).
Une permutation de E est un arrangement de n éléments de E (c'est-à-dire une n-liste d'éléments distincts de E).

Exemple 5.35 :

On considère l'ensemble $E = \{p; r; o; f\}$.
Les anagrammes (ayant un sens ou non) du mot « prof »sont les permutations de E.
Les lister !

✎ *Exercice(s) :*

TP 1 p. 288

Théorème 5.36 :

On considère un ensemble E de cardinal fini n ($\text{Card}(E) = n$).
Le nombre de permutation de E est :

$$A_n^n = n!.$$

Complément(s) :

Méthode 3 p. 279 : « Dénombrer et utiliser des permutations ».

Complément(s) :

La vidéo « Dénombrer en utilisant les permutations ».

V. Dénombrement des Combinaisons

Définition 5.38 : ***Combinaison***

On considère un ensemble E de cardinal fini n ($\text{Card}(E) = n$) et p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
Une p-combinaison (ou combinaison de p éléments) est une partie de E ayant p éléments.

Exemple 5.39 :

On considère l'ensemble $E = \{a; b; c\}$.

- $p = 1$. Lister les combinaisons de 1 élément.
- $p = 2$. Lister les combinaisons de 2 éléments.

Remarque 5.40 :

Il est important de retenir que, dans une partie :

- les éléments sont deux à deux distincts ;
- l'ordre dans lequel on écrit les éléments n'a pas d'importance $\{a; b\} = \{b; a\}$.

Théorème 5.41 :

On considère un ensemble E de cardinal fini n ($\text{Card}(E) = n$) et p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
Le nombre de combinaisons de p éléments de E, noté $\dbinom{n}{p}$ et se lisant « p parmi n », est :

$$\binom{n}{p} = \frac{A_p^n}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Exemple 5.42 :

Ecrire une fonction python `CoefficientBinomial` qui prend en arguments deux entiers n et p et qui renvoie $\dbinom{n}{p}$.

Remarque 5.43 :

$\dbinom{n}{p}$ est appelé coefficient binomial. Nous verrons pourquoi dans un chapitre de probabilités.
De plus, ces coefficients sont des entiers, on le démontrera plus tard dans ce chapitre.

Exemple 5.44 :

Calculer, à l'aide de la calculatrice, $\dbinom{4}{2}$, $\dbinom{6}{5}$ et $\dbinom{12}{8}$.

Complément(s) :

Méthode 2 p. 281 : « Calculer et interpréter des combinaisons ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 34, 41 et 42 p. 295.

Complément(s) :

La vidéo « Démontrer en utilisant les combinaisons ».

VI. Propriétés des coefficients binomiaux

Propriété 5.46 : Symétrie des coefficients binomiaux

On considère un entier $n \in \mathbb{N}$ et p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
On a alors :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Autrement dit, dans un ensemble à n éléments, il y a autant de parties à p éléments que de parties à $n-p$ éléments (ces deux parties sont complémentaires).

Propriété 5.47 :

On considère un entier $n \in \mathbb{N}$.
On a alors :
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \text{et} \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$
Autrement dit, dans un ensemble à n éléments,
- il y a une seule partie à 0 élément : la partie vide.
- il y a une seule partie à n élément : l'ensemble lui-même.
- il y a n parties à un seul élément.

Propriété 5.48 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Démonstration exemplaire 5.49 :

On considère l'ensemble $E = \{1; 2; 3; \dots; n\}$.
L'objectif ici est de dénombrer toute les parties de E. On va procéder de deux manières différentes :
- On va dénombrer toutes les parties de E selon sa cardinalité. On décompose alors le problème
  - Les parties à 0 élément : il y en a $\binom{n}{0} = 1$: c'est l'ensemble vide.
  - Les parties à 1 élément : il y en a $\binom{n}{1}$
  - ...
  - Les parties à n éléments : il y en a $\binom{n}{n} = 1$: c'est l'ensemble E

  D'après le principe d'additivité, le nombre de parties de l'ensemble E est $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$.
- Pour écrire une partie de E ou un sous ensemble de E, il suffit de se demander, pour chaque élément de E, si on l'écrit ou pas. Ainsi, on a :
  - Pour 1 : on a 2 choix : soit on l'écrit dans le sous-ensemble ou pas.
  - Pour 2 : on a 2 choix : soit on l'écrit dans le sous-ensemble ou pas.
  - ...
  - Pour n : on a 2 choix : soit on l'écrit dans le sous-ensemble ou pas.

  D'après le principe multiplicatif, e nombre de parties de l'ensemble E est 2^n.

Finalement, on a :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$
□

Propriété 5.50 : ***Formule de Pascal***

On considère un entier $n \in \mathbb{N}$ et un entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.
On a alors :
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Démonstration exemplaire 5.51 :

On démontrera ce résultat de deux manières différentes.

Méthode 1 : Par dénombrement

$\binom{n+1}{p+1}$ correspond au nombre de $p+1$-combinaisons d'un ensemble E à $n+1$ éléments.
Soit a un élément de E (a est fixé). Il existe alors deux types de sous-ensembles à $p+1$ éléments : les sous-ensembles qui contiennent a et les sous-ensembles qui ne contiennent pas a.

- Si a est l'un des éléments de la $p+1$-combinaison, il me reste à choisir p éléments parmi les n éléments restants dans E : il y a donc $\binom{n}{p}$ combinaisons.
- Si a n'est pas l'un des éléments de la $p+1$-combinaison, il me reste à choisir $p+1$ éléments parmi les n éléments restants dans E (tous sauf a) : il y a donc $\binom{n}{p+1}$ combinaisons.

Donc on a bien :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Méthode 2 : Par les calculs

1. Exprimer, en fonction de n et p, les coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$ $\binom{n}{p+1}$ et $\binom{n+1}{p+1}$.
2. En déduire le résultat : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$. □

Remarque 5.52 :

Pour déterminer les coefficients binomiaux, on peut utiliser « le triangle de Pascal ».
Pour cela, on utilise un tableau à double entrée, dans lequel :

- chaque colonne représente une valeur de k ;
- chaque ligne représente une valeur de n .

On résume ce procédé par ce qui suit :

n \ k	...	k	$k+1$
$\vdots$			
n	...	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1}$
$n+1$	...		$\binom{n+1}{k+1}$

On obtient alors le tableau suivant pour les premières valeurs de n et k inférieures à 5 :

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Complément(s) :

Méthode 2 p. 283 : « Utiliser les coefficients du triangle de Pascal ».

Exercice(s) :

Exercice 47 p. 295.

Complément(s) :

La vidéo « Utiliser le triangle de Pascal ».

Exercice(s) :

Exercice 94 p. 302.

Résumé

Complément(s) :

La vidéo « Arrangement, permutation, combinaison, ... : lequel choisir ? - Terminale ».

Méthodologie 5.55 : ***p-listes ? Arrangements ? Combinaisons ?***

Pour savoir si on doit utiliser des p-listes, des arrangements ou des combinaisons, on doit se poser les questions suivantes :

- les éléments sont-ils répétés ?
- L'ordre des éléments est-il à prendre en considération ?

On résume alors ces critères dans le tableau suivant :

Critères	Les éléments peuvent être répétés	Les éléments sont tous distincts
L'ordre a son importance	On utilise les p-listes	On utilise les arrangements
L'ordre n'a pas d'importance		On utilise les combinaisons

Exemple 5.56 : ***Euromillion***

Sans tenir compte des étoiles, on tire au hasard 5 boules parmi 49.
Combien de tirages possible est-il possible d'effectuer ?

Exemple 5.57 : ***Podium***

10 participants courent un 200 m. Il y aura un podium constitué de trois médaillés : or, argent et bronze.
Combien y a-t-il de podiums possibles ?

Exemple 5.58 : ***Codes CB***

Combien y-a-t'il de codes possibles pour les cartes bleues ?