Chapitre 9
La fonction Exponentielle

Sommaire

Capacités :	Exercices :	Bilan :				
Transformer des expression avec l'exponentielle	11, 12, 53 et 55 p. 167 à 174					
Résoudre des équations et inéquations avec l'exponentielle	13, 54, 56, 57, 58 p. 168/174					
Etudier une fonction avec e^x	62, 63, 65 et 66 p.174/175					
Etudier une fonction avec e^{ax+b}	14, 15, 75 et 76 p. 168/176					

A l'instar de π, nous allons découvrir, dans ce chapitre, un nombre qui a intéressé les mathématiciens autant que le nombre π : le nombre e appelé constante d'Euler.
Tout comme $\pi \approx 3,141\,59$, on peut donner une valeur approché $e \approx 2,718\,28$.
Tout comme π, ce nombre e est un nombre irrationnel : il ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction de deux entiers : ce résultat fut démontré par EULER en 1739.
Tout comme π, ce nombre e n'est solution d'aucune équation polynômiale (on appelle ces nombres, des nombres transcendants) : ce résultat fut découvert par Charles HERMITE (mathématicien français 1822 à 1901) en 1873.
Le nombre e est un nombre pannumérique (nombre constitué de tous les chiffres avec ou sans le 0). Ce résultat fut démontré par R. SABEY et elle est juste jusqu'à plus de 10^{25} décimales :

$$e \approx \left(1 + 9^{-4^{6\times 7}}\right)^{3^{2^{85}}}.$$

I. Définition de la fonction exponentielle

Propriété 9.1 :

On considère une fonction f vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} f'(x) = f(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x)f(-x) = 1 \qquad \text{et} \qquad f(x) \neq 0.$$

Démonstration 9.2 :

On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
On pose la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = f(x)f(-x)$.
ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables.
On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = f(-x)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u'(x) = -f'(-x)$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x)) \\ &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme $\phi'(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors la fonction ϕ est constante sur $\mathbb{R}$.
De plus, on a :

$$\begin{aligned} \phi(0) &= f(0)f(0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\phi(x) = 1.$$

C'est-à-dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x)f(-x) = 1.$$

Supposons maintenant qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.
On a alors :

$$\begin{aligned} \phi(x_0) &= f(x_0)f(-x_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ceci est impossible puisque $\phi(x_0) = 1$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \neq 0$.

Théorème 9.3 : Définition de la fonction exponentielle

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}.$$

Ce système admet une unique solution appelée **fonction exponentielle** définie sur $\mathbb{R}$.
On note cette fonction $f(x) = \exp(x)$.

Démonstration 9.4 :

On souhaite démontrer l'existence d'une unique solution. On va donc procéder en deux étapes :

- **Existence :** l'existence d'une telle fonction est admise.
- **Unicité :** on suppose qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2 solutions du système :

$$\begin{cases} f'(x) = f(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_1(x) \neq 0$, alors on peut considérer la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\psi(x) = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}.$$

ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (avec $f_1(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\psi'(x) = \frac{f_2'(x)f_1(x) - f_1'(x)f_2(x)}{(f_1(x))^2}.$$

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_1'(x) = f_1(x)$ et $f_2'(x) = f_2(x)$, alors on a $\psi'(x) = 0$.
Ainsi ψ est une fonction constante et comme $\psi(0) = \dfrac{f_2(0)}{f_1(0)} = 1$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\psi(x) = 1.$$

C'est-à-dire :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 1.$$

Comme $f_1(x) \neq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_1(x) = f_2(x)$.
D'où l'unicité de la fonction solution.

II. Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Propriété 9.5 : ***Exponentielle d'une somme***

Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

Remarque 9.6 :

Il s'agit là de la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle : elle transforme un produit d'exponentielles en l'exponentielle d'une somme et réciproquement.

Démonstration 9.7 :

On considère un nombre $y \in \mathbb{R}$.
On considère la fonction δ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\delta : x \longmapsto \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)}.$$

$v : x \longmapsto \exp(x+y)$ est une fonction du type $x \longmapsto u(ax+b)$ avec $u = \exp$, $a = 1$ et $b = y$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} v'(x) &= \exp'(x+y) \\ &= \exp(x+y). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \delta'(x) &= \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} \\ &= \delta(x). \end{aligned}$$

De plus, $\delta(0) = \dfrac{\exp(y)}{\exp(y)} = 1$.
Ainsi, la fonction δ est une fonction solution du système suivant :

$$\begin{cases} f'(x) = f(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}.$$

Or seule la fonction exponentielle est solution de ce système : il s'agit donc de la fonction exponentielle et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\delta(x) = \exp(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = \exp(x)$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

Exemple 9.8 :

Soit $x \in \mathbb{R}$, exprimer en fonction de $\exp(x)$ $\exp(2x)$.

Propriété 9.9 : Exponentielle d'un opposé

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

Démonstration 9.10 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \exp(0) = \exp(x - x) &\iff 1 = \exp(x) \times \exp(-x) \\ &\iff \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

Propriété 9.11 : Exponentielle d'une différence

Pour tous x et y dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

Démonstration 9.12 :

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On note que $x = x - y + y$.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \exp(x) = \exp(x - y + y) &\iff \exp(x) = \exp(x - y)\exp(y) \\ &\iff \frac{\exp(x)}{\exp(y)} = \exp(x - y) \qquad \text{car } \exp(y) \neq 0. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

Propriété 9.13 : Puissance d'une exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\exp(nx) = \exp(x)^n.$$

Démonstration 9.14 :

La démonstration est admise.
Cependant, on donne ci-dessous l'idée de la démonstration.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \exp(nx) &= \exp(\underbrace{x + \cdots + x}_{n \text{ fois}}) \\ &= \exp(x) \cdot \exp(\underbrace{x + \cdots + x}_{n-1 \text{ fois}}) \\ &= \exp(x) \cdot \exp(x) \cdot \exp(\underbrace{x + \cdots + x}_{n-2 \text{ fois}}) \\ &= \underbrace{\exp(x) \cdot \cdots \cdot \exp(x)}_{n \text{ fois}} \\ &= \exp(x)^n. \end{aligned}$$

Remarque 9.15 :

En prenant $x = 1$ à la dernière propriété, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\exp(n) = \exp(1)^n.$$

On pose $\exp(1) = e$. e est le nombre d'Euler et, avec la calculatrice, on peut en donner une valeur approchée :

$$e \approx 2,718\,281.$$

On peut alors noter que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\exp(n) = e^n.$$

Ainsi, par extension aux réels, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp(x) = e^x.$$

Il s'agit là d'une nouvelle notation.
Dorénavant, on écrira que la fonction exponentielle est définie par :

$$f(x) = e^x.$$

On lit alors « e puissance x » ou « e exposant x ».

Exemple 9.16 :

Simplifier l'expression $\dfrac{e^{-4}}{e^3 \times (e^5)^4}$.

Complément(s) :

Savoir-Faire 2 p. 167 « Utiliser une relation fonctionnelle ».

Complément(s) :

Vidéo « Appliquer les formules sur la fonction exponentielle »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 11, 12, 53 et 55 p. 167 à 174.

III. Etude de la fonction exponentielle

Propriété 9.17 : ***Signe de la fonction exponentielle***

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$.

Démonstration 9.18 :

Soit $x \in \mathbb{R}$.
On remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\exp(x) &= \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp(x) > 0.$$

Remarque 9.19 :

Dans la démonstration précédente, on a démontré que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp(x) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2.$$

Ainsi, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sqrt{\exp(x)} = \exp\left(\frac{x}{2}\right).$$

Exemple 9.20 :

Etudier le signe de $-e^x(x^2 - 9)$.

Propriété 9.21 : — Dérivabilité de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp'(x) = e^x.$$

Exemple 9.22 :

Calculer la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = e^x + 3x^2 - 8$.

Complément(s) :

Vidéo « Dériver une fonction exponentielle »

Propriété 9.23 : — Variations de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration 9.24 :

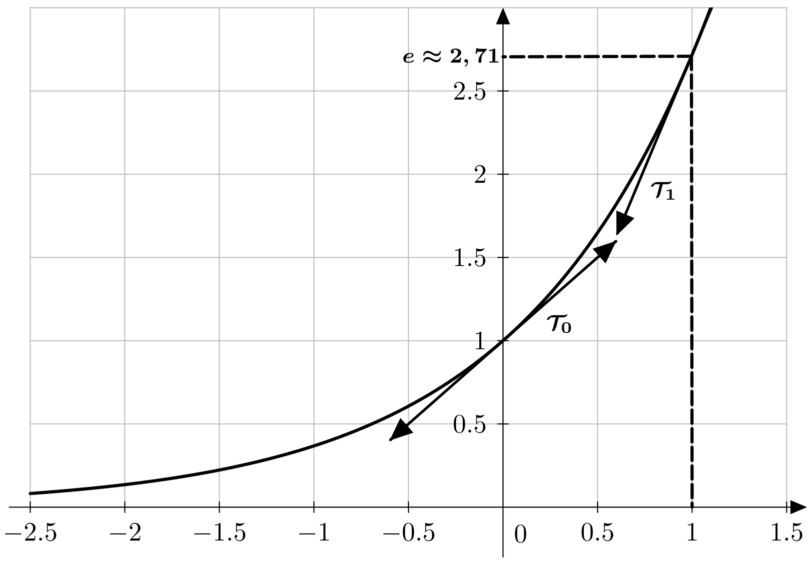
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp'(x) = e^x > 0$$

La fonction exponentielle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque 9.25 :

On donne ci-dessous une illustration graphique de la fonction exponentielle.



On donne une équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisses 0, notée $\mathcal{T}_0$:

$$y = e^0(x-0) + e^0 \iff y = x + 1.$$

On donne une équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisses 1, notée $\mathcal{T}_1$:

$$y = e^1(x-1) + e^1 \iff y = e\,x.$$

Complément(s) :

Savoir-Faire 1 p. 167 « Dériver un produit, un quotient ».

Complément(s) :

Vidéo « Etudier une fonction avec l'exponentielle »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 62, 63 et 66 p. 174

Propriété 9.26 : Conséquences algébriques des variations

Soient x et y deux réels. On a :

$$e^x = e^y \iff x = y.$$

De plus, on a :

$$e^x < e^y \iff x < y.$$

Propriété 9.27 : Antécédent(s) par la fonction exponentielle

Soit m un réel strictement positif. L'équation $e^x = m$ admet une unique solution réelle, notée $\ln(m)$.

Méthode 9.28 : Résoudre une équation avec l'exponentielle

La propriété précédente affirme donc qu'il existe un unique antécédent à m ($m > 0$) par la fonction exponentielle.
En pratique, pour trouver un antécédent à m, on utilisera la calculatrice et la touche : $\boxed{\ln}$ Il s'agit de la fonction « logarithme népérien » : fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Exemple 9.29 :

Résolvons les deux équations suivantes :

$$e^x = e^4 \qquad \text{et} \qquad e^x = 7.$$

Remarque 9.30 :

Les deux dernières propriétés affirment que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x = \ln\left(e^x\right).$$

Complément(s) :

Savoir-Faire 3 « Résoudre des équations ou inéquations ».

Complément(s) :

Vidéo « Résoudre une équation avec des exponentielles »

Complément(s) :

Vidéo « Résoudre une inéquation avec des exponentielles »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 13, 54, 56, 57, 58 et 61 p. 168 à 174.

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 65 p. 175

IV. Compléments sur la fonction exponentielle

Propriété 9.31 :

On considère deux réels a et b.
La fonction $f : x \longmapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = a \cdot e^{ax+b}.$$

Démonstration 9.32 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = g(ax+b).$$

g étant la fonction exponentielle.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= ag'(ax+b) \\ &= ae^{ax+b}. \end{aligned}$$

Exemple 9.33 :

Déterminer les variations de la fonction f définie par $f(x) = 9e^{-x+8}$.

Remarque 9.34 :

Il est notamment utile de connaitre le résultat suivant :

$$\exp'(-x) = -e^{-x}.$$

Complément(s) :

Savoir-Faire 4 « Etudier les variations d'une fonction ».

Complément(s) :

Vidéo « Dériver une fonction exponentielle e^{kt} »

✎ Exercice(s) :

Exercices 14, 15, 75 et 76 p. 168 à 176.

Complément(s) :

Vidéo « Etudier une fonction exponentielle dans une situation concrète »

✎ Exercice(s) :

Exercices 107 et 111 p. 182/183.