Devoir Surveillé 3 (ou 2/bis)

NOM : .... Prénom : ....

Exercice 1 : *(5 points)*

1. **ROC :** Démontrer la propriété suivante :

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ divise } b \\ a \text{ divise } c \end{array}\right\} \Longrightarrow a \text{ divise } bu + cv \quad \text{avec } u \in \mathbb{Z} \text{ et } v \in \mathbb{Z}$$

Aide : *On s'appuiera sur la définition de la divisibilité :*

a divise b si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$.

2. **Application :** Déterminer les entiers relatifs k tels que $5k + 1$ divise $2k - 3$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 2 : *(5 points)*

1. Trouver tous les entiers relatifs a et b tels que :

$$(a + 1)(b - 2) = 10$$

2. En déduire les entiers naturels a et b tels que :

$$(a + 1)(b - 2) = 10$$

Exercice 3 : *(3 points)*

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a la propriété suivante :

$$7^n - 2^n \text{ est un multiple de } 5.$$

Exercice 4 : *(3 points)*

On considère la propriété suivante :

Si n^2 est pair alors n est pair

1. Enoncer la contraposée de la propriété ci-dessus.
2. Démontrer la propriété de l'énoncé.

Exercice 5 : *(5 points)*

1. Soit n un entier tel que son reste dans la division euclidienne par 14 est 11.
   Déterminer le reste de n par la division euclidienne par 7.
2. Soit m un entier tel que son reste dans la division euclidienne par 7 est 4.
   Déterminer le reste de m par la division euclidienne par 14.