Chapitre 2
Continuité

Sommaire

I. Notion de continuité

1. Définition de la continuité

Définition 2.1 : d'une fonction continue au point a

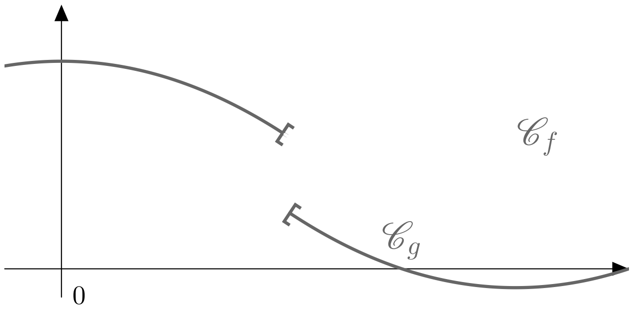
Une fonction f est continue en a si et seulement si f est définie sur un intervalle I ouvert contenant a et qu'on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Définition 2.2 : d'une fonction continue sur un intervalle

Une fonction f est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout point a de I.

Remarque 2.3 :

Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par le fait que sa courbe représentative peut être tracer sans lever le crayon sur cet intervalle.



La fonction f est continue, alors que la fonction g n'est pas continue.
On dit alors que la fonction g possède un point de discontinuité qui est représenté par un saut de sa courbe représentative.

Complément(s) :

Lire la méthode 1 p. 51 du manuel « Conjecturer la continuité d'une fonction ».

✎ ***Exercice(s) :***

Faire l'exercice 27 p. 60 du manuel.

2. Etude de la fonction partie entière

Définition 2.4 : ***Fonction partie entière***

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier n tel qu'on a :

$$n \leqslant x < n+1.$$

La fonction partie entière est la fonction E définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$E(x) = n.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut aussi noter $E(x) = \lfloor x \rfloor$.

Exemple 2.5 :

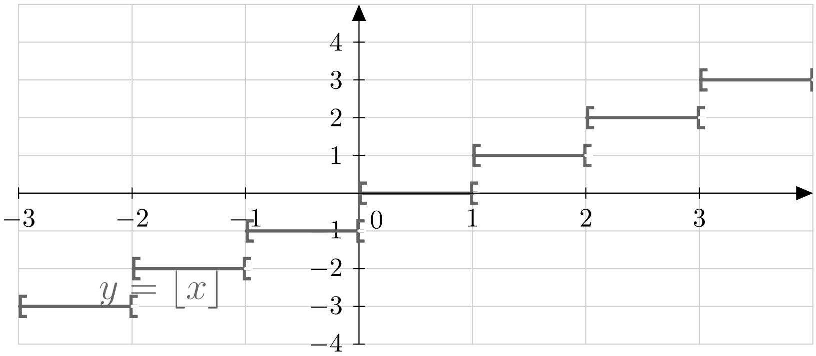
Calculons quelques images de réels par la fonction partie entière :

$$E(0,1) \qquad E(0,99) \qquad E(0,5)$$

$$E(3) \qquad E(3,00001) \qquad E(3,999) \qquad E(-0,001) \qquad E(-0,7) \qquad E(-3,6) \qquad E(-10,001)$$

Remarque 2.6 :

Graphiquement, la fonction partie entière est *une fonction en escalier.*
La représentation graphique de la fonction partie entière va se composer de segments (semi- ouverts) de la forme $[n; n+1[$.
On donne une représentation graphique de la fonction E ci-dessous :



Graphiquement, on voit que cette fonction n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.
Cependant, cette fonction partie entière est continue sur chaque intervalle de la forme $[n; n+1[$, où $n \in \mathbb{Z}$.
On peut montrer que la fonction partie entière n'est pas continue en 1. De manière plus générale, elle possède une discontinuité en chaque entier.

3. Propriétés

Théorème 2.7 :

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Remarque 2.8 :

La réciproque de ce théorème est fausse : toute fonction continue sur un intervalle I n'est pas forcément dérivable.
La fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable en 0.

Propriété 2.9 :

- Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$.
  Ainsi, les fonctions affines, carré et cubique sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynomiales) est continue sur son domaine de définition.
  Ainsi, la fonction inverse est continue sur $]-\infty; 0[$ et elle est continue sur $]0; +\infty[$.

Propriété 2.10 :

La fonction racine carré est continue sur $[0; +\infty[$.

Propriété 2.11 :

Toute fonction construite comme somme, produit, inverse, quotient ou composée à partir des fonctions de référence est continue sur l'intervalle où elle est définie.

Exemple 2.12 :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + x^3$ est continue car polynomiale.

II. Continuité et Equations

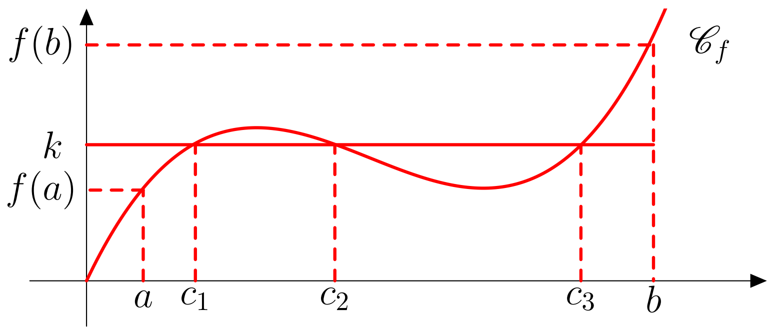
1. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2.13 : — Théorème des valeurs intermédiaires

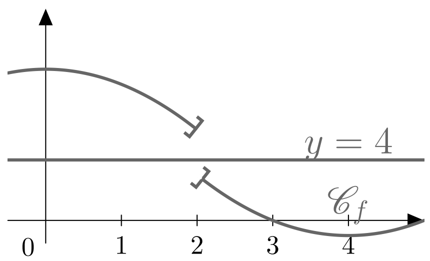
On considère une fonction f définie sur un intervalle I et deux réels a et b de I tels que :

- f continue sur I
- k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$

Alors, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c dans $[a; b]$.



Remarque 2.14 :



L'hypothèse de continuité est primordiale.

Dans cet exemple, comme la fonction f n'est pas continue sur $[0; 5]$, l'équation $f(x) = 4$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

Complément(s) :

Lire la méthode 1 p. 53 du manuel « Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires ».

Exemple 2.15 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 12$.
Montrer que, sur l'intervalle $[0; 4]$, l'équation $f(x) = -10$ admet au moins une solution.

Remarque 2.16 :

- On remarque que le théorème des valeurs intermédiaires, justifie l'existence de solutions, mais en aucun cas, il justifie le nombre de solutions présentes sur l'intervalle considéré. Dans le cas où l'équation $f(x) = k$ admet des solutions sur un intervalle, on en sait donc pas si la solution est unique, s'il y en a 2, ou 3, ou plus.
- L'unicité d'une solution sera justifié par une hypothèse supplémentaire à ce théorème : la stricte monotonie de la fonction f sur cet intervalle, comme l'énonce le théorème suivant.

Théorème 2.17 : — Théorème de la bijection

On considère deux nombres réels a et b dans I avec $a < b$ et f une fonction définie sur I. Si :
- f est continue sur $[a; b]$,
- f strictement monotone (strictement croissante ou strictement décroissante) sur $[a; b]$,
- k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Alors, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution c dans l'intervalle $[a; b]$.

Remarque 2.18 :

Le théorème précédent est un corollaire (conséquence directe) du Théorème des valeurs intermédiaires.

Démonstration 2.19 :

On considère une fonction f telle que :
- f est continue sur $[a; b]$,
- f strictement monotone (strictement croissante ou strictement décroissante) sur $[a; b]$,
- k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

La première et la troisième hypothèses, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, nous permet de justifier l'existence de solution dans l'intervalle $[a; b]$.
Il reste maintenant à démontrer l'unicité de cette solution.
On suppose alors qu'il existe deux solutions distinctes c_1 et c_2 à l'équation $f(x) = k$ dans l'intervalle $[a; b]$.
Comme $c_1 \neq c_2$, on peut supposer $c_1 < c_2$ et comme la fonction f est strictement monotone sur $[a; b]$, on a $f(c_1) > f(c_2)$ (dans le cas où f est strictement décroissante sur $[a; b]$) ou $f(c_1) < f(c_2)$ (dans le cas où f est strictement croissante sur $[a; b]$).
Ceci est impossible car $f(c_1) = f(c_2) = k$ (car ce sont des solutions de l'équation $f(x) = k$).
Finalement, l'hypothèse faite concernant c_1 et c_2 est fausse, c'est-à-dire que $c_1 = c_2$ et donc il existe une unique solution à l'équation $f(x) = k$ sur l'intervalle $[a; b]$. □

Complément(s) :

Lire les méthodes 2 et 3 p. 53 du manuel « Etudier une équation du type $f(x) = 0$ avec f strictement monotone »et « Etudier une équation du type $f(x) = k$ ».

Exemple 2.20 :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^3 + 12x - 1$.
Montrer que $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-20; -2]$.

✎ Exercice(s) :

Faire les exercices 40 et 51 p. 61/63

Théorème 2.21 : ***Théorème de Bolzano***

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$ et si $f(a)\times f(b)<0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[a;b]$.

Démonstration 2.22 :

Il s'agit d'une conséquence du théorème de la bijection.
En effet, la fonction f est continue et sitrctement monotone sur l'intervalle $[a;b]$.
L'hypothèse $f(a)\times f(b)<0$, nous assure que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire (donc l'un positif et l'autre négatif selon la monotonie de la fonction f sur cet intervalle) et donc que 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Le théorème de la bijection peut alors s'appliquer. $\square$

2. Approximation d'une solution

Remarque 2.23 :

Dans cette sous partie, on souhaite donner des valeurs approchées d'un nombre α, solution de l'équation $f(x)=k$ sur un intervalle $[a;b]$.
Pour simplifier la suite de l'étude, on se ramène à une équation du type $f(x)=0$ (pour une équation du type $f(x)=k$, on peut se ramener, en définissant la fonction g par $g(x)=f(x)-k$ à une équation du type $g(x)=0$).

Méthode par balayage

L'objectif de cette partie est de donner un encadrement à 10^{-p} près de la solution, notée α, de l'équation $f(x)=0$ sur $[a;b]$.

On effectue alors la méthode suivante :

Etape 1 : on balaie l'intervalle $[a;b]$ avec un pas de 1. On obtient les sous intervalles suivants : $[a;a+1]$, $[a+1;a+2]$, ..., $[b-2;b-1]$ et $[b-1;b]$.
On cherche alors un intervalle de longueur 1 contenant α.
On va alors regarder, dans un premier temps, si α se trouve dans l'intervalle $[a;a+1]$. Pour se faire, on calcule $f(a)$ et $f(a+1)$ et on distingue alors deux cas :

- $f(a)$ et $f(a+1)$ sont de signes opposés : α se trouve dans cet intervalle.
  On passe alors à l'étape 2.
- $f(a)$ et $f(a+1)$ sont de même signes : on regarde si α se trouve dans l'intervalle suivant : $[a+1;a+2]$.
  On recommence ce même procédé tant qu'on n'a pas trouvé deux images consécutives de signes opposés.

On obtient à la fin de cette étape un intervalle de la forme $[n;n+1]$ parmi les sous intervalles donnés plus haut.

Etape 2 : on balaie l'intervalle trouvé à l'étape précédente $[n;n+1]$ avec un pas de $0,1$. On obtient alors les sous intervalles suivants : $[n;n+0,1]$, $[n+0,1;n+0,2]$, ..., $[n+0,8;n+0,9]$ et $[n+0,9;n+1]$.
On cherche alors un intervalle de taille 10^{-1} contenant α.
On procède de la même manière qu'à l'étape précédente, à savoir : on calcule $f(n)$, $f(n+0,1)$, ... et on s'arrete dès qu'on trouve deux images consécutives $f(p)$ et $f(q)$ de signes opposés.
La solution α se trouve alors dans l'intervalle $[p,q]$ (de longueur $0,1$).

Etapes suivantes : Ainsi de suite, jusqu'à l'étape $p+1$ où l'intervalle recherché sera de taille 10^{-p}.

On peut alors donner un algorithme qui détaille la méthode décrite précédemment.
On considère les nombres a, b et p connus ainsi que la fonction f connue.
L'algorithme, écrit en langage naturel, est le suivant :

```
Pour k allant de 0 à p faire :
    Tant que f(a) × f(a + 10^(-k)) > 0 faire :
        a ⟵ a + 10^(-k)
    Fin Tant que
    k ⟵ k + 1
Fin Pour
```

Exemple 2.24 :

On considère la fonction f définie sur $[0; 3]$ par :

$$f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 7.$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; 3]$, notée α, puis donner un encadrement à 10^{-2} près de cette solution.

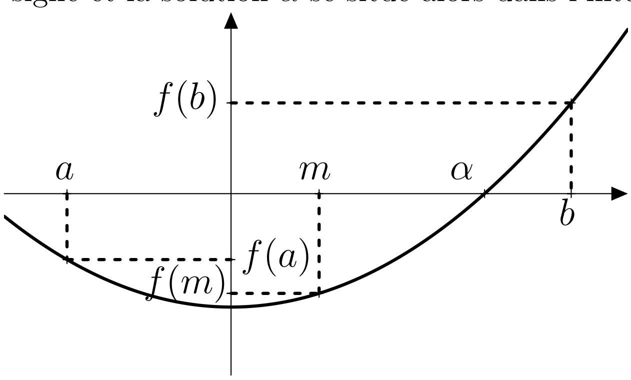
Méthode par dichotomie

L'objectif de cette partie est de donner un encadrement à ε près de la solution, notée α, de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a; b]$.

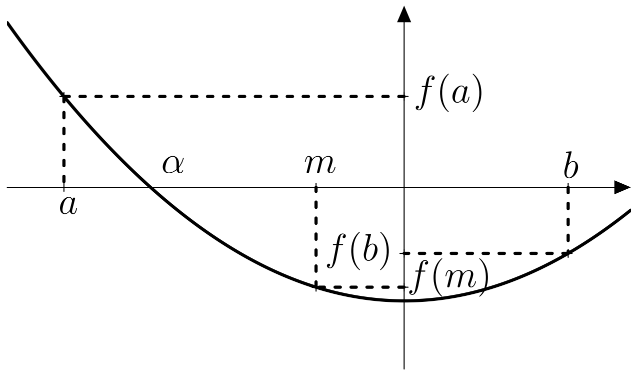
On effectue alors la méthode suivante :

On découpe l'intervalle $I = [a; b]$ en deux sous intervalles de même amplitude.
Pour se faire, on utilise le milieu de $[a; b]$ qui est $m = \dfrac{a+b}{2}$.
On obtient ainsi deus sous-intervalles $[a; m]$ et $[m; b]$.
On calcule alors $f(m)$ et on compare son signe à celui de $f(a)$.
Vient alors deux cas :

- $f(a)$ et $f(m)$ sont de même signe et la solution α se situe alors dans l'intervalle $[m; b]$.



- $f(a)$ et $f(m)$ ont des signes contraires et la solution α se situe alors dans l'intervalle $[a; m]$.



On réitère ce procédé en remplaçant l'intervalle $[a;b]$ par l'un des deux intervalles précédemment trouvé ($[a;m]$ ou $[m;b]$), autant de fois que nécessaire, jusqu'à l'obtention d'un intervalle d'amplitude souhaitée.

On peut alors donner un algorithme qui détaille la méthode décrite précédemment.
On considère les nombres a, b et p connus ainsi que la fonction f connue.

L'algorithme, décrit en langage naturel, est le suivant :

```
Tant que |b − a| > ε faire :
    m ⟵ (a + b)/2
    Si f(m) × f(a) > 0 faire :
        a ⟵ m
    Sinon :
        b ⟵ m
Fin Tant Que
```

Exemple 2.25 :

On considère la fonction f définie sur $[0;3]$ par :

$$f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 7.$$

En utilisant la méthode de dichotomie, donner un encadrement à 10^{-3} près de la solution comprise entre 0 et 3.

✎ ***Exercice(s) :***

Faire les exercices 50, 56, 57 et 58 p. 89/92/93.