Chapitre 8
Généralités sur les suites

Sommaire

Capacités :	Exercices :	Bilan :				
Calculer les termes d'une suite à partir de son expression & Représenter graphiquement les termes d'une suite	9, 10, 13, 14, 57,61, 64, 65, 76, 77, 80, 89, 86 et 90 p. 21 à 33					
Déterminer le sens de variations d'une suite	15, 16, 17 et 114 p. 25 à 34					
Conjecturer la convergence d'une suite	Exemples de cours					

Leonardo FIBONACCI (1180 à 1250) de son vrai nom Leonado DA PISA est un mathématicien qui a parcouru plusieurs pays méditerranéens (Sicile, Grèce, Syrie et Egypte). Il apprend les mathématiques grecques et arabes. Il est notamment convaincu par la supériorité du système d'écriture des nombres avec les chiffres arabes. Son oeuvre est fondamentale puisqu'il permit d'établir un lien entre les mathématiques arabes et celles de La Renaissance. Il a notamment permis l'introduction des nombres arabes en Occident.

I. Définitions et notations

Définition 8.1 : ***Suite numérique***

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Remarque 8.2 :

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Exemple 8.3 :

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 3n - 10.$$

- Calculer le terme d'indice 2.

  . . . .

  . . . .

- Calculer u_{11}.

  . . . .

  . . . .

- Exprimer le terme d'indice $2n$, en fonction de n.

  . . . .

  . . . .

Remarque 8.4 :

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Remarque 8.4 (suite) :

Par exemple :

- La suite de terme général $u_n = \sqrt{n-3}$ ....

  ....

  ....

- La suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$ ....

  ....

  ....

II. Modes de générations et représentations des suites

Il existe plusieurs façons de définir une suite numérique :

- ....

  ....

  ....

- ....

  ....

  ....

1. Les suites définies de manière explicite

Exemple 8.5 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ et la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$. Calculer u_0, u_2 et u_{n+1}.

....

....

....

....

....

....

....

....

Remarque 8.6 :

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous une forme explicite, c'est-à-dire de la forme $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $[0;+\infty[$.

Graphiquement, ...

....

....

....

....

....

....

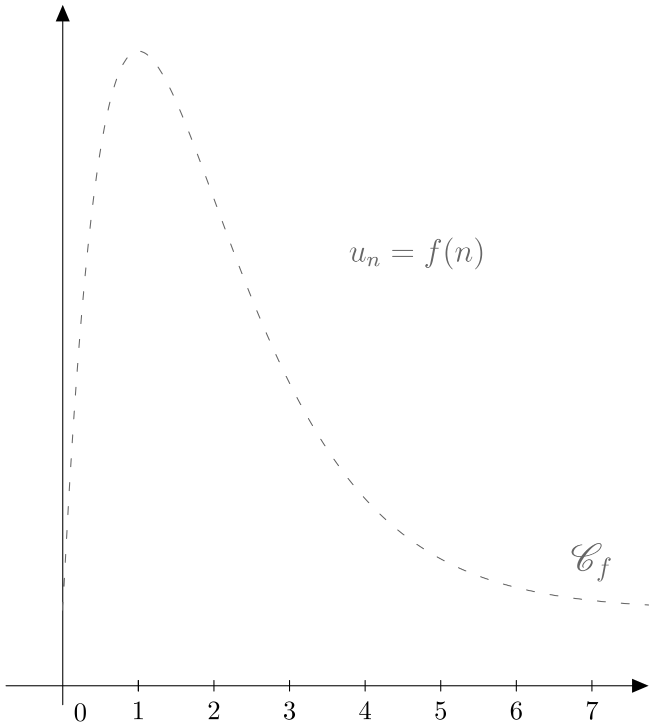
....

....

....

....

On obtient alors le graphique suivant :



Complément(s) :

Savoir-Faire 1 p. 21 « Utiliser une formule explicite ».

Complément(s) :

Vidéo « Calculer les premiers termes d'une suite (1) »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 9, 10 p. 21 et 57, 61, 64 et 65 p. 30/31.

2. Les suites définies par récurrence

On considère une fonction f définie sur un intervalle I, telle que pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in I$ (on peut aussi noter que $f(I) \subset I$). On peut alors définir une suite (u_n) par la donnée de u_0 (avec $u_0 \in I$) et par *la relation de récurrence* $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemple 8.7 :

On considère une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$ et une suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1}=f(u_n)$ telle que $u_0=256$.

Calculer u_3.

....

....

....

....

....

....

....

Remarque 8.8 :

....

....

....

....

....

....

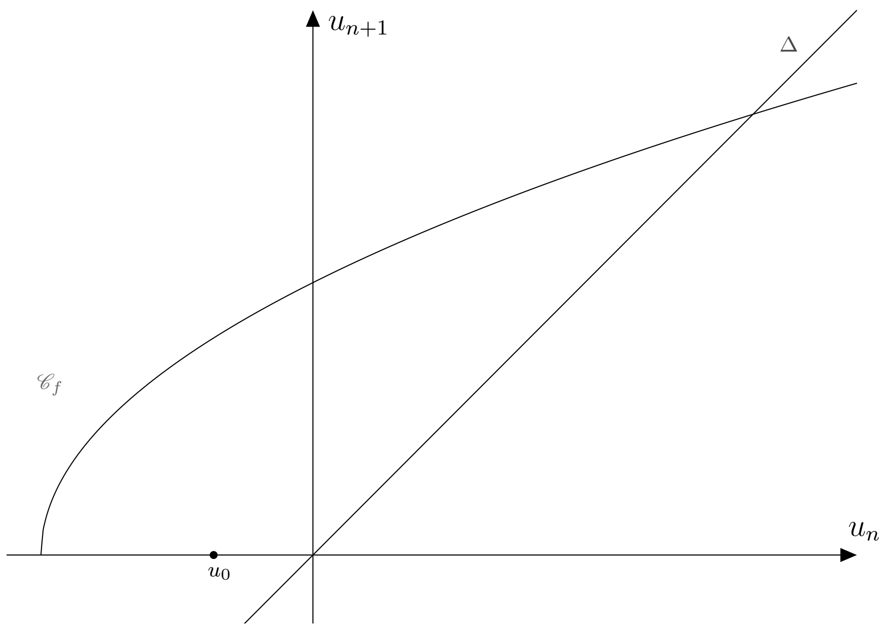
....

....

....

....

....



Complément(s) :

Savoir-Faire 2 p. 23 « Modéliser à l'aide d'une suite récurrente ».

Complément(s) :

Vidéo « Calculer les premiers termes d'une suite (2) »

Remarque 8.9 :

La donnée de u_0 et d'une relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$ ne permet pas toujours de définir une suite.

La condition « pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in I$ » est importante.

Exemple 8.10 :

On considère une suite (u_n) définie par récurrence, c'est-à-dire de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

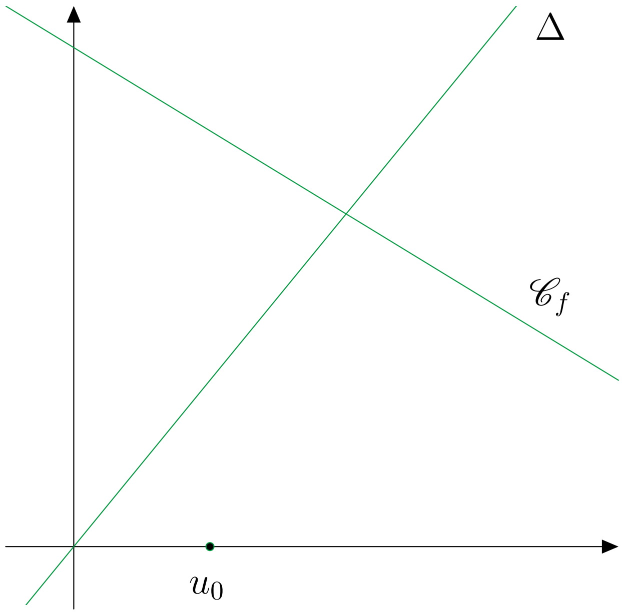
Sur le graphique suivant, on donne la représentation graphique de la fonction f, la droite Δ d'équation $y = x$ ainsi que la valeur de u_0 sur l'axe des abscisses.

Représenter sur l'axe des abscisses les termes u_1, u_2 et u_3.

. . . .

. . . .

. . . .



Exercice(s) :

Exercices 13 et 14 p. 23 et 76, 77, 80, 89, 90 et 86 p. 32/33

Remarque 8.11 :

On évitera la confusion entre une suite définie à l'aide d'une fonction f par récurrence et de manière explicite.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$.

- $u_n = f(n)$: On a $u_0 = \ldots\ldots\ldots$, $u_1 = \ldots\ldots\ldots$, $u_2 = \ldots\ldots\ldots$, $u_3 = \ldots\ldots\ldots$, etc ...
- $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 = 1$: On a $u_0 = \ldots\ldots\ldots$, $u_1 = \ldots\ldots\ldots$, $u_2 = \ldots\ldots\ldots$, $u_3 = \ldots\ldots\ldots$, ...

Ces deux suites sont définies par une même fonction pourtant, elles ne définissent pas la même suite.

Complément(s) :

Vidéo « Représenter graphiquement une suite »

III. Monotonie des suites

Définition 8.12 : Suite croissante, décroissante ou constante

On considère I une partie infinie de $\mathbb{N}$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est :

- ....
- ....
- ....

Définition 8.13 : Suite monotone

....

Méthode 8.14 : Etudier la monotonie d'une suite

Dans la pratique, pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\in I}$, on peut :

- ....
- ....
- ....

Exemple 8.15 : A l'aide de l'étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4$ et on définit la suite (u_n) par $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Etudier la monotonie de la suite (u_n) par l'étude des variations d'une fonction.

Complément(s) :

Savoir-Faire 5 p. 25 « Déterminer les variations d'une suite à l'aide d'une fonction ».

Complément(s) :

Vidéo « Etudier les variations d'une suite à partir de l'étude d'une fonction »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 17 p. 25.

Exemple 8.16 : A l'aide de la différence de deux termes consécutifs

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = -3n + 1$. Etudier la monotonie de la suite (u_n) par l'étude de $u_{n+1} - u_n$.

Complément(s) :

Vidéo « Etudier les variations d'une suite (1) »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 15 p. 24

Exemple 8.17 : — ***A l'aide du quotient de deux termes consécutifs***

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$.

Etudier la monotonie de la suite (u_n) par l'étude de $u_{n+1} - u_n$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Complément(s) :

Savoir-Faire 4 p. 24 « Déterminer les variations d'une suite en comparant les termes »

Complément(s) :

Vidéo « Etudier les variations d'une suite (2) »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 16 p. 24.

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 114 p. 34.

IV. Limites des suites et recherches de seuil

1. Limite finie

Définition 8.18 : Suite convergente vers ℓ

....

....

....

....

Pour tout $h > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $|u_n - \ell| < h$.

On note alors :

....

Remarque 8.19 :

....

....

....

....

....

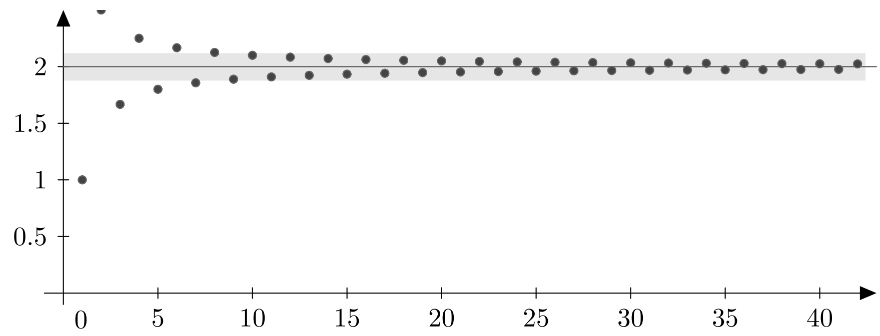
....

....

....

....

....



Remarque 8.20 :

Pour conjecturer la limite d'une suite, on peut utiliser :

- ....
  ....
- ....
  ....
- ....

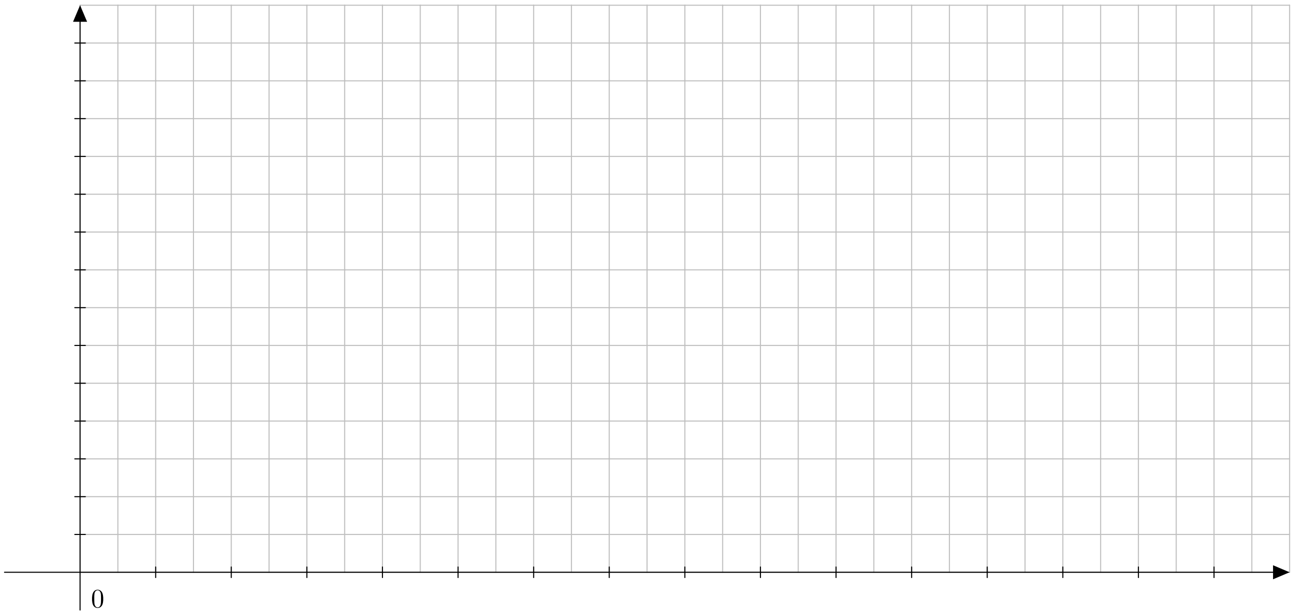
Exemple 8.21 :

On définit la suite (u_n) pour tout $n \geqslant 3$ par :

$$u_n = 1 - \frac{10}{(n+1)^2}.$$

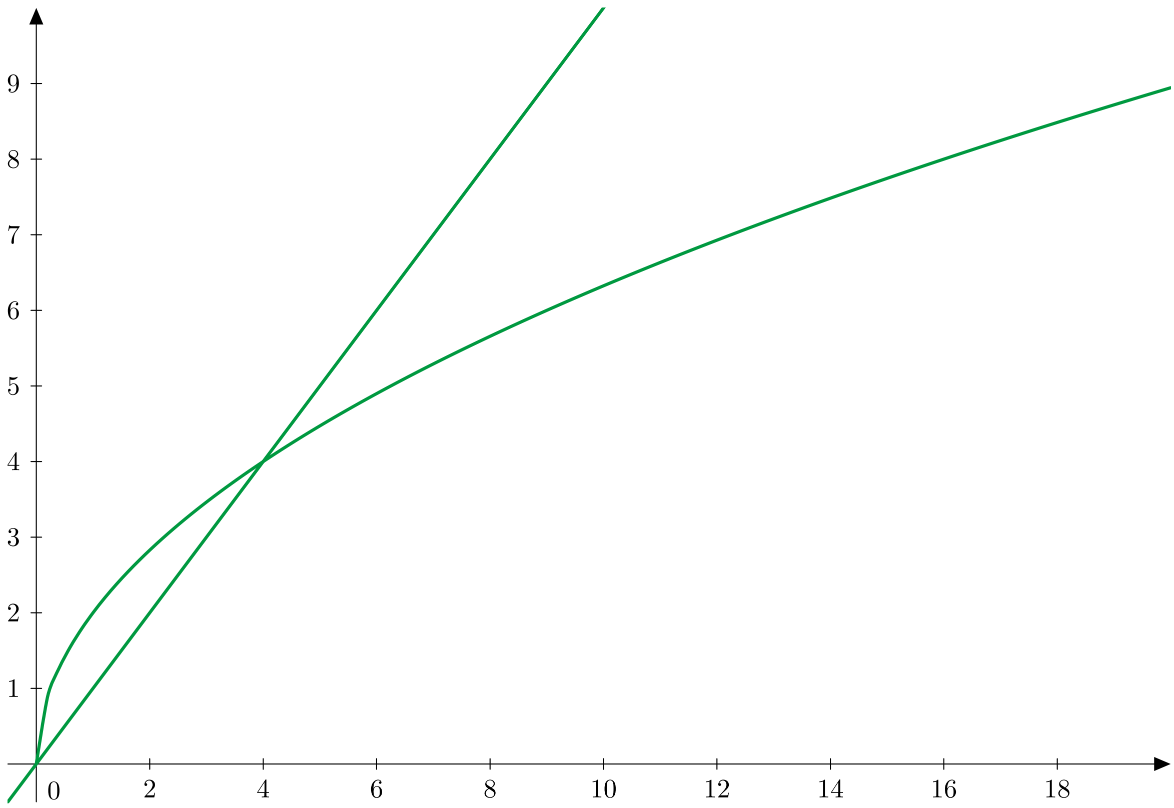
1. Représenter le nuage de points $(n; u_n)$ pour $0 \leqslant n \leqslant 30$ à l'aide de la calculatrice.
2. A l'aide du graphique, conjecturer la limite, notée ℓ, de la suite (u_n).
3. Ecrire un algorithme qui donne la valeur de n pour laquelle $|u_n - \ell| < 0,05$.

   Programmer cet algorithme avec Python et donner la valeur de n affichée.



Exemple 8.22 :

On a représenté, sur le graphique suivant, la fonction f. On définit (u_n) par la relation de récurrence suivante $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 18$. Conjecturer la limite de la suite (u_n).



2. Limite infinie

Définition 8.23 : ***Suite divergente vers*** $\pm\infty$

- ....
....
....
....
- ....
....
....
....

On note alors :

....

Exemple 8.24 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n - 3$ et $u_0 = 1$.

1. Démontrer que cette suite est strictement décroissante.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. On admet que (u_n) diverge vers $-\infty$.

   On souhaite alors déterminer le seuil N à partir duquel on a pour tout $n \geqslant N$, $u_n < M$, où M est un réel fixé.

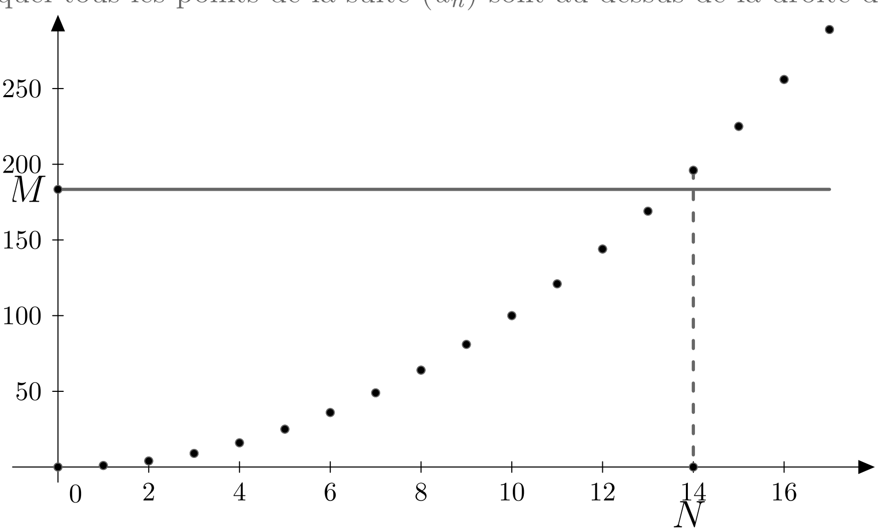
   Ecrire un algorithme qui permet de répondre à ce problème.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Vérifier en programmant votre algorithme Python que lorsque M vaut -100, la variable n, le seuil cherché est 34.

Remarque 8.25 :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$: graphiquement, cela se traduit par : quelque soit un réel M positif, il existe un rang à partir duquel tous les points de la suite (u_n) sont au dessus de la droite d'équation $y = M$.



- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$: graphiquement, cela se traduit par : quelque soit un réel M négatif, il existe un rang à partir duquel tous les points de la suite (u_n) sont au dessous de la droite d'équation $y = M$. On obtiendrait un graphique semblable au précédent.

3. Suites n'ayant pas de limite

Il existe des suites qui n'ont pas de limites. On donnera ici un exemple d'une telle suite.

Exemple 8.26 :

La suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = (-1)^n.$$

Cette suite (u_n) n'admet pas de limite, on dit qu'elle est divergente.

En effet, la suite (u_n) peut être définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots \text{ si } n \text{ est pair} \\ \ldots\ldots\ldots \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant 1$$

Ainsi, la limite de la suite (u_n) ne peut être $+\infty$ ou $-\infty$.

De plus, si la suite (u_n) tend vers une limite ℓ, alors l'intervalle $[\ell - 0,5 ; \ell + 0,5]$ ne peut contenir à la fois -1 (le termes impairs de (u_n)) et 1 (le termes pairs de (u_n)).

On dit alors que la suite est divergente.

Complément(s) :

Vidéo « Déterminer la limite d'une suite »