Chapitre 14
La fonction Logarithme Népérien

Sommaire

Capacités :	**Exercices :**	Non Acquis	Acquis
Transformer des expressions avec le logarithme			
Résoudre des équations et inéquations avec ln			
Etudier une fonction avec $\ln(x)$			
Etudier une fonction avec $\ln(u(x))$			

Introduction

John NAPIER (ou NEPER) (de 1550 à 1617) est un mathématicien et théologien écossais. Bien que n'ayant obtenu aucun diplôme universitaire, il mit 20 ans à développer sa découverte concernant les logarithmes.
Une anecdote :

> Un jour, il annonça à ses voisins, suspects dans des vols récurrents, que son coq était doué de pouvoirs magiques. Chaque suspect devait s'enfermer dans une pièce obscure et caresser le coq. Il avait au préalable enduit son coq de suie et seul le coupable n'avait pas osé caresser le coq et fut ainsi démasqué.

I. Etude de la fonction logarithme

Activité 14.1 :

On cherche à déterminer la fonction réciproque de la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ (on notera cette fonction réciproque g). Pour tracer la courbe représentative d'une fonction réciproque, il faut tracer la courbre symétrique de la fonction, par la symétrie axiale d'axe $y = x$.

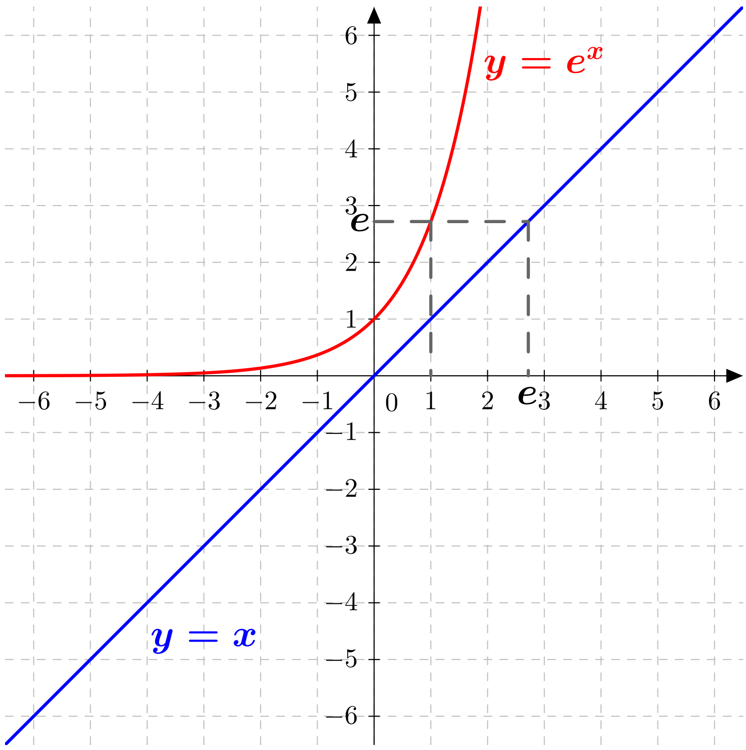
1. Sur le graphique suivant, tracer la courbe représentative de la fonction réciproque de la fonction exponentielle.
2. D'après la courbe représentative de la fonction g construite précédemment, emettre des conjectures sur les points suivants :

   (a) L'ensemble de définition de la fonction g.

   (b) $g(1)$ et $g(e)$

   (c) Le tableau de signes de la fonction g.

   (d) Le tableau de variation de la fonction g.



Définition 14.2 : ***de la fonction logarithme népérien***

On appelle fonction logarithme népérien, la fonction réciproque de la fonction exponentielle, on la note

$$f(x) = \ln(x)$$

Cette fonction est définie sur $]0; +\infty[$.

Propriété 14.3 :

La fonction logarithme étant la fonction réciproque de la fonction exponentielle, on a :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\ln(e^x) = x}$
- Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\boldsymbol{e^{\ln(x)} = x}$

Exemple 14.4 :

$\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.

Remarque 14.5 :

On fera bien la distinction entre les deux propriétés précédentes. En effet la première est valable pour tout réel (cela vient du fait que $e^x > 0$ pour tout x), alors que la seconde n'est valable que sur $]0;+\infty[$ car ln n'est définie que sur $]0;+\infty[$.

Exemple 14.6 :

Résoudre $e^x = 4$ et $\ln(x) = 12$.

Exercice(s) :

Exercices 1, 4 et 6 p. 194

Propriété 14.7 :

La fonction logarithme népérien est **dérivable sur $]0;+\infty[$** et pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a :

$$\boldsymbol{\ln(x)' = \frac{1}{x}}$$

De plus, la fonction logarithme est continue sur $]0;+\infty[$.

Exemple 14.8 :

Calculer la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x) + 12x^3 - 1$.

Théorème 14.9 :

La fonction logarithme est **strictement croissante sur $]0;+\infty[$**.
Ainsi, pour tout $\boldsymbol{a > 0}$ et $\boldsymbol{b > 0}$, on a :

$$\boldsymbol{a < b \iff \ln(a) < \ln(b)}$$

Démonstration 14.10 :

Comme $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$, alors $\dfrac{1}{x} > 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$ et la fonction logarithme est srtictement croissante sur $]0;+\infty[$. □

Exercice(s) :

Exercices 28 et 31 p. 196 (uniquement les variations).

II. Propriétés algébriques de la fonction logarithme

Propriété 14.11 :

Pour tous réels a et b positifs, on a :

$$\boldsymbol{a = b \iff \ln(a) = \ln(b)}$$

Exemple 14.12 :

On cherche à résoudre l'équation

$$\ln\left((x+3)(x-2)\right) = \ln(6)$$

1. Montrer que les solutions d'une telle équations sont appartiennent à l'ensemble $]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$.
2. Résoudre alors cette équation.

Propriété 14.13 :

Pour tout réels $a > 0$ et $b > 0$, on a :

$$\boldsymbol{\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)}$$

Démonstration 14.14 :

On pose $X = \ln(ab)$ et $Y (= \ln(a) + \ln(b)$.

On a :

$$\begin{aligned} e^X &= e^{\ln(ab)} \\ &= ab \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} e^Y &= e^{\ln(a)+\ln(b)} \\ &= e^{\ln(a)}e^{\ln(b)} \\ &= ab \end{aligned}$$

Donc $e^X = e^Y \iff X = Y$ c'est-à-dire :

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab).$$

□

Exemple 14.15 :

Simplifier $\ln(6) + \ln(5) + \ln\left(\frac{1}{30}\right)$.

Propriété 14.16 :

Pour tout réel $a > 0$, on a :

$$\boldsymbol{\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

Démonstration 14.17 :

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a $1 = a \times \dfrac{1}{a}$.
On a :

$$\begin{aligned} \ln(1) = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) &\iff 0 = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) \\ &\iff -\ln(a) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) \end{aligned}$$

□

Propriété 14.18 :

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a :

$$\boldsymbol{\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)}$$

Démonstration 14.19 :

On a :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) \\ &= \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) \\ &= \ln(a) - \ln(b) \end{aligned}$$

□

Exemple 14.20 :

Simplifier $-\ln\left(\dfrac{1}{20}\right) + \ln(40)$.

Propriété 14.21 :

Pour tout réel $a > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\boldsymbol{\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)}$$

Démonstration 14.22 :

On démontre la propriété pour $n \in \mathbb{N}$ par récurrence sur n. □

Exemple 14.23 :

Simplifier $\ln\left(\dfrac{3}{4}\right) + \ln\left(\dfrac{8}{3}\right) - \ln\left(2^3\right)$

Propriété 14.24 :

Pour tout réel $a > 0$, on a :

$$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

Démonstration 14.25 :

Pour tout $a > 0$, on a $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$.
On a alors :

$$\begin{aligned} \ln(a) = \ln\left(\sqrt{a}^2\right) &\iff \ln(a) = 2\ln(\sqrt{a}) \\ &\iff \frac{1}{2}\ln(a) = \ln(\sqrt{a}) \end{aligned}$$

□

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 8, 9, 13 et 14 p. 194.

III. Les limites de la fonction logarithme

1. Les limites aux bornes de $]0;+\infty[$

Propriété 14.26 :

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

Démonstration 14.27 :

- Dire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ signifie que pour tout réel A, il existe un réel B tel que si $x > B$, alors $\ln(x) > A$.
  Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$, on considère $\ln(x) > A$, comme la fonction exponenetielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a $e^{\ln(x)} > e^A \iff x > e^A$.
  Ainsi, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il exste $B = e^A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > B$, on a $\ln(x) > A$.
  Ainsi, on a :
  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$
- On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$. On a alors :
  $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty \\ \lim\limits_{Y \to +\infty} -Y = -\infty \end{cases}$$
  Donc, d'après le théorème des limites des fonctions composées, on a :
  $$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

$\square$

Exemple 14.28 :

Justifier que la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + x + 1$ admet exactement une racine sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque 14.29 :

On peut alors donner un tableau de variations complet de la fonction logarithme :

x	0	1	e	$+\infty$
Signe de $\frac{1}{x}$	||	+		
Variation de ln	|| $-\infty$	0	1	$+\infty$

2. Les limites comparées

Propriété 14.30 :

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Démonstration 14.31 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x)}{x} &= \frac{\ln(x)}{e^{\ln(x)}}\\ &= \frac{1}{\dfrac{e^{\ln(x)}}{\ln(x)}}.\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty\\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty\\ \displaystyle\lim_{Y\to+\infty} \frac{1}{Y} = 0\end{cases}$$

Donc, d'après le théorème des limites des fonctions composées, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

□

Propriété 14.32 :

On a :

$$\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0.$$

Démonstration 14.33 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$x\ln(x) = e^{\ln(x)}\ln(x).$$

On a alors :

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty\\ \displaystyle\lim_{X\to-\infty} Xe^X = 0\end{cases}$$

Donc, d'après le théorème des limites des fonctions composées, on a :

$$\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0.$$

□

IV. Equations et Inéquations

1. Les équations

Propriété 14.34 :

La fonction logarithme est définie sur $]0;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\ln(a) = \ln(b) \iff a > 0 \text{ et } b > 0 \text{ et } a = b.$$

Exemple 14.35 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(E_1)\ :\ \ln\left((x+3)(x-2)\right) = \ln(6)$;
2. $(E_2)\ :\ \ln(x+3) + \ln(x-2) = \ln(6)$;
3. $(E_3)\ :\ \ln\left(\dfrac{1}{x-1}\right) = 1$.

2. Les inéquations

Propriété 14.36 :

La fonction logarithme est définie sur $]0;+\infty[$ est elle y est strictement croissante.

$$\begin{cases} \ln(x) < 0 \iff x \in]0;1[\\ \ln(x) > 0 \iff x \in]1;+\infty[\\ \ln(a) < \ln(b) \iff a > 0 \text{ et } b > 0 \text{ et } a < b \end{cases}$$

Exemple 14.37 :

Résoudre l'inéquation $I_1\ :\ \ln(2x) \geq \ln(x^2-1)$.

Exemple 14.38 :

On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \dfrac{3}{4}$.
Trouver le plus petit entier n pour lequel $u_n \leq 10^{-4}$.

V. Logarithme d'une fonction

Propriété 14.39 :

On considère une fonction u définie et dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ sur I.
On peut alors définir la fonction $\ln(u)$ sur I et pour tout $x \in I$, on a :

$$\ln'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Remarque 14.40 :

- En reformulant la propriété précédente, on peut alors écrire :

  Soit u une fonction définie et dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$.

  Une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{u'}{u}$ est la fonction $x \longmapsto \ln(u(x))$.

Remarque 14.41 :

Notamment si u est une fonction affine (du type $u(x) = ax + b$), la fonction $x \mapsto \ln(ax + b)$ est définie lorsque $ax + b > 0$ et, on a :

$$(\ln(ax + b))' = \frac{a}{ax + b}.$$

Exemple 14.42 :

On considère une fonction f définie par $g(x) = \ln(2x^2 - 1)$.
Après avoir donné le domaine de définition de la fonction f, étudier ses variations.

Propriété 14.43 :

Les fonctions u et $\ln(u)$ ont le même sens de variations sur I.

Exemple 14.44 :

On considère une fonction g définie par $g(x) = \ln(-2x + 1)$.
Après avoir donné le domaine de définition de la fonction g, étudier ses variations.

Propriété 14.45 :

On a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

Démonstration 14.46 :

La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable en 0 et on a $(\ln(1+x))' = \dfrac{1}{1+x}$ Alors :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0} = (\ln(1+x))'(0) = 1$$

$\square$

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 93 p. 213