Chapitre 4
Limites des suites

Sommaire

Capacités :	**Exercices :**	Non Acquis	Acquis
Justifier la convergence d'une suite	39, 77 p. 63/70		
Déterminer la limite d'une suite	2, 6, 13, 14, 16, 17, 23, 25, 29, 77 p. 60 à 70		
Ecrire ou modifier un algorithme de seuil	9, 26, 77 p. 60 à 70		

Introduction

Augustin-Louis CAUCHY (de 1789 à 1857) mathématicien français et professeur à l'université des sciences de Paris et à l'Ecole Polytechnique où il y enseigne 33 années. Il apporte de nombreuses avancées en analyse notamment en donnant un cadre à cette branche des mathématiques qui commence à se développer.
Son œuvre est fondamentale dans le développement des mathématiques qui passe d'une science « outils de la physique »(à la fin du XVIII ème siècle) à une science à part entière, rigoureuse et indépendante.
Critère de Cauchy :

$$(u_n) \text{ de Cauchy } \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geqslant N, q \geqslant N, \text{ on a } |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Une citation :

> « Très souvent les lois particulières déduites par les physiciens d'un grand nombre d'observations ne sont pas rigoureuses, mais approchées.

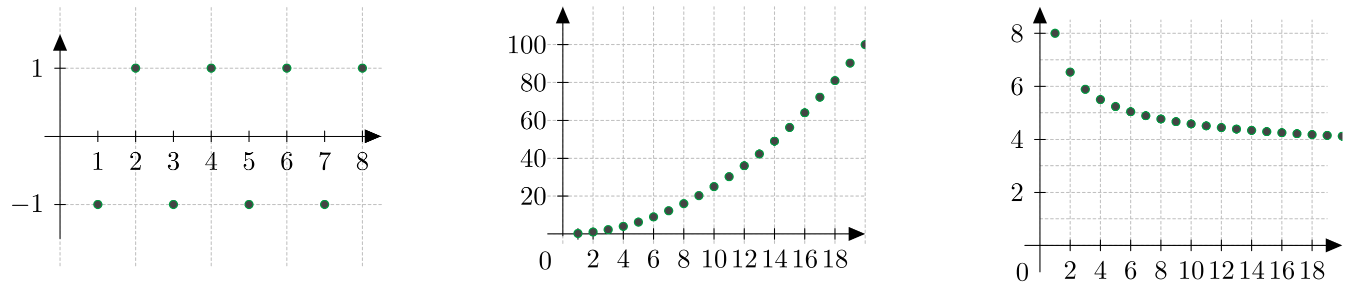
I. Limites des Suites

Définition 4.1 : ***Limite d'une suite***

On dit qu'une suite (u_n) converge vers ℓ si lorsque n augmente, u_n se rapproche de l.
On note $\lim u_n = \ell$.
Dans le cas contraire, on dit que la suite (u_n) diverge.

Exemple 4.2 :

On donne trois graphiques, illustrant les cas de limites que l'on peut trouver dans la pratique :



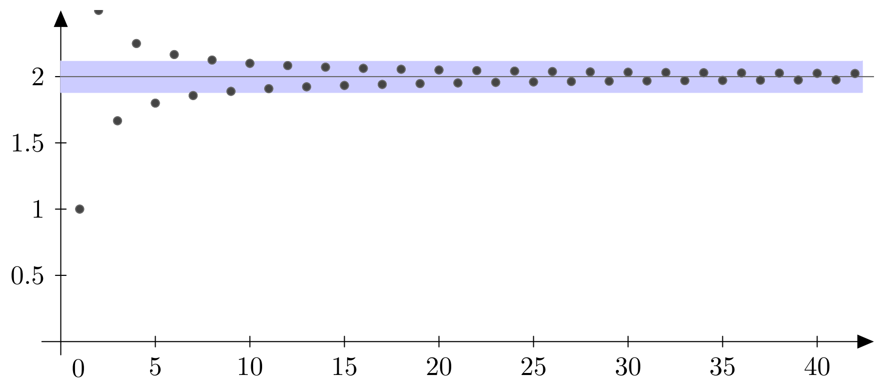
1. Suites convergentes vers un réel

Définition 4.3 : ***Suite convergente***

Une suite (u_n) admet une limite ℓ (ou converge vers ℓ) lorsque tout intervalle centré en ℓ (i.e. de la forme $[\ell - h; \ell + h]$, $h > 0$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Remarque 4.4 :

Graphiquement, cela se traduit par : quelque soit la largeur de la bande horizontale choisie, il existe un rang à partir duquel tous les points de la suite (u_n) sont dans cette bande.



Algébriquement, cela se traduit par : Pour tout $h > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n - \ell| < h$.

Exemple 4.5 : Avec la représentation graphique $u_n = f(n)$

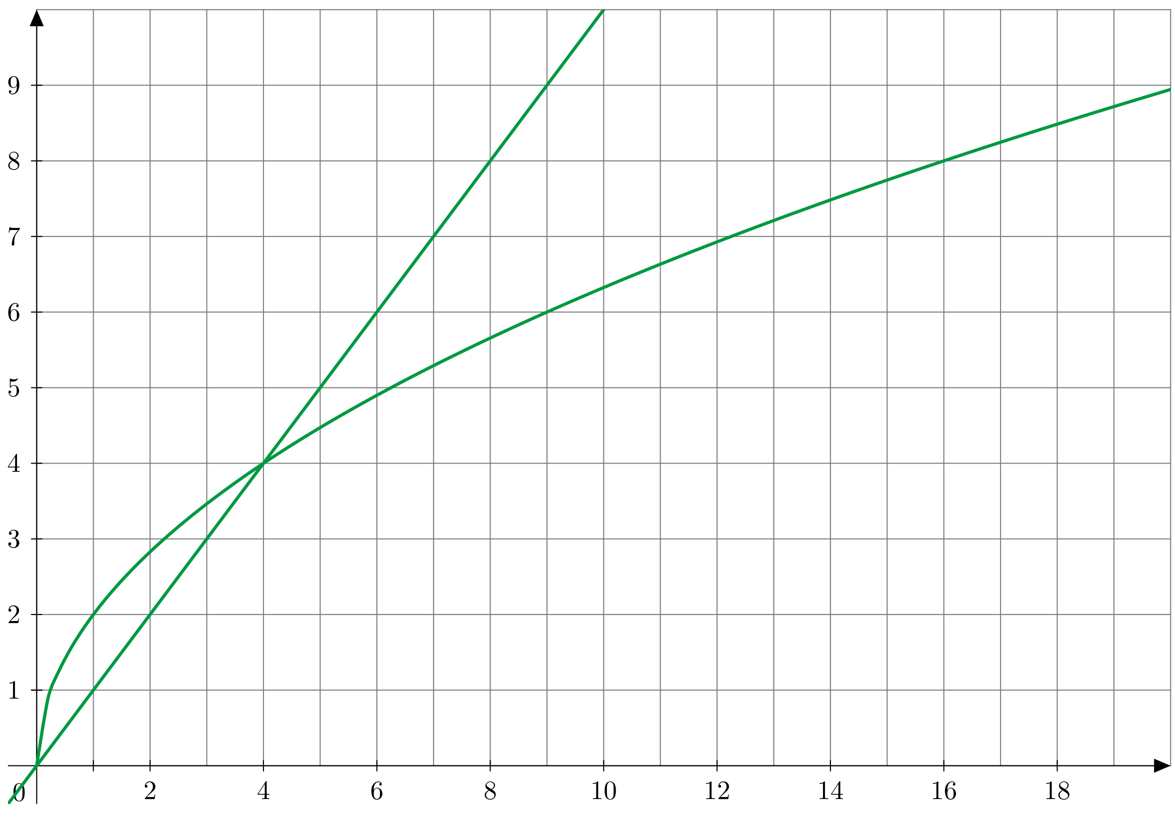
On définit la suite (u_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{0,1(n+1)^2}$.

1. Représenter le nuage de points $(n; u_n)$ pour $0 \leqslant n \leqslant 30$.
2. Conjecturer la valeur de la limite ℓ de cette suite et tracer la droite d'équation $y = \ell$.
3. Colorier la bande $\ell - 0,2 \leqslant y \leqslant \ell + 0,2$.
4. En déduire le rang N à partir duquel $|u_n - \ell| < 0,2$ pour tout $n \geqslant N$.

Exemple 4.6 : Avec la représentation graphique $u_{n+1} = f(u_n)$

On a représenté, sur le graphique suivant, la fonction f. On définit la suite (u_n) par la relation de récurrence suivante $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = 2\sqrt{x}$ et $u_0 = 18$.

1. Conjecturer la limite de la suite (u_n).
2. Que dire de cette limite ?



Remarque 4.7 :

Pour rechercher un seuil, on peut utiliser un algorithme en utilisant une boucle « Tant que ».

Exemple 4.8 : Avec un algorithme

On définit la suite (u_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$ et $u_0 = 18$.
On veut résoudre $|u_n - 4| < h$.
Compléter l'algorithme suivant pour qu'à la fin de l'algorithme, la variable n contienne le seuil de la suite pour lequel $|u_n - 4| < h$.

```
n ⟵ ........................
u ⟵ ........................
Tant que ..........................faire :
    n ⟵ ......................
    u ⟵ ......................
Fin Tant que
```

Le tester avec Python pour différentes valeurs de h.

Complément(s) :

Lire la Méthode 1 p. 45 : « Déterminer la limite d'une suite en utilisant la définition ».

Exemple 4.9 : Par les calculs

On considère une suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 1 + \dfrac{3}{n+1}$.
A partir de quel rang a-t-on $|u_n - 1| < 0,001$? et $|u_n - 1| < h$?

✎ Exercice(s) :

Exercice 6 p. 61

Propriété 4.10 :

Une suite (u_n) converge vers 0 si et seulement si la suite $(|u_n|)$ converge vers 0.
De même, une suite (u_n) converge vers ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) si et seulement si la suite $(|u_n - \ell|)$ converge vers 0.

Exemple 4.11 :

Démontrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0.

Propriété 4.12 :

Toute suite convergente est bornée.

Propriété 4.13 :

On considère une suite (u_n) convergente vers ℓ alors ℓ est unique.

Propriété 4.14 :

On considère une suite (u_n) définie par récurrence (de terme général $u_{n+1} = f(u_n)$) et convergente vers ℓ. Alors la limite ℓ vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$.

Propriété 4.15 :

On considère une suite (u_n) convergente vers un réel ℓ.
- Si (u_n) est majorée par M, alors $\ell \leqslant M$.
- Si (u_n) est minorée par m, alors $\ell \geqslant m$.

Théorème 4.16 : ***Théorème de Convergence Monotone***
- Toute suite (u_n) croissante et majorée converge.
- Toute suite (u_n) décroissante et minorée converge.

Exemple 4.17 :

On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence suivante $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = 2\sqrt{x}$ et $u_0 = 18$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 18$.
2. Justifier que la suite (u_n) converge.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Complément(s) :

Lire la Méthode 3 p. 51 : « Prouver la convergence d'une suite monotone ».

Complément(s) :

Lire la vidéo « Appliquer le théorème de convergence monotone ».

✎ ***Exercice(s) :***

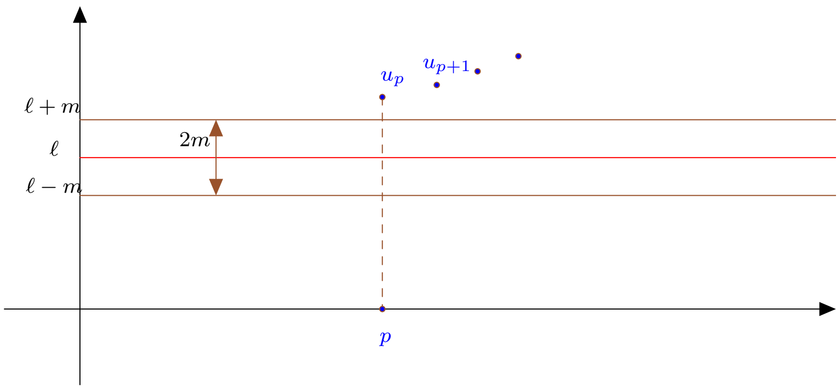
Exercice 39 p. 63

Propriété 4.19 :

On considère une suite (u_n).
- Si (u_n) est croissante et convergente alors elle est majorée par sa limite.
- Si (u_n) est décroissante et convergente alors elle est minorée par sa limite.

Démonstration 4.20 :

On considère une suite (u_n) croissante et telle que $\lim u_n = \ell$.
On va démontrer ce résultat par l'absurde.
Hypothèse : il existe un terme u_p tel que $u_p > \ell$.



Comme la suite (u_n) est supposée croissante, lorsque $n \geq p$, on a $u_n \geq u_p$.
On choisit un nombre réel m tel que $m < u_p - \ell$ et on pose $I =]\ell - m; \ell + m[$.
Cet intervalle I est centré en ℓ et comme la suite converge vers ℓ, par définition, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang N.
En résumé, lorsque $n > N$ et $n > p$, $u_n \in I$ (c'est-à-dire $u_n < u_p$) et $u_n > u_p$ (car la suite est croissante) ce qui est absurde.
L'hypothèse faite au départ est donc fausse : il n'existe donc pas terme u_p tel que $u_p > l$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq l$. $\square$

2. Suites divergentes vers $\pm\infty$

Définition 4.21 : ***Suite divergente***

Une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ lorsque pour tout $M \in \mathbb{R}^+$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel toutes les valeurs u_n sont plus grandes que M (i.e. tel que pour tout $n \geqslant N$ on a $u_n \geqslant M$).
Une suite (u_n) diverge vers $-\infty$ lorsque pour tout $M \in \mathbb{R}^-$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel toutes les valeurs u_n sont plus petites que M (i.e. tel que pour tout $n \geqslant N$ on a $u_n \leqslant M$).

Exemple 4.22 : ***Avec un algorithme***

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n - 3$ et $u_0 = 1$.
Elle est décroissante de limite $-\infty$.
Compléter l'algorithme suivant pour que, à la fin de l'algorithme, la variable n contienne le premier rang n à partir duquel on a $u_n < M$.

```
n ⟵ ........................
u ⟵ ........................
Tant que ..........................faire :
    n ⟵ ......................
    u ⟵ ......................
Fin Tant que
```

Le tester avec Python pour différentes valeurs de M.

Complément(s) :

Lire la vidéo « Suites : Déterminer un seuil pour une suite (algorithme) - Tutoriel PYTHON ».

Exemple 4.24 : ***Par les calculs***

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - n$. Elle est croissante de limite $+\infty$. Déterminer le rang n tel que $u_n > M$, puis en déduire le rang n pour lequel $u_n > 1000$.

Complément(s) :

Lire la méthode 2 p. 45 : « Déterminer une limite infinie en utilisant la définition ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 2 et 9 p. 60

Théorème 4.25 :

On considère une suite (u_n).

- Si (u_n) est croissante et non majorée alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Si (u_n) est décroissante et non minorée alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Démonstration exemplaire 4.26 :

On considère une suite croissante et non majorée.
On rappelle la définition d'une suite majorée : il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
Dire que la suite (u_n) n'est pas majorée signifie que quelque soit le réel M choisi, il existe un entier p tel que $u_p > M$.
Comme la suite (u_n) est croissante, on en déduit que quelque soit le réel M choisi, il existe un entier p tel que pour tout $n \geq p$, $u_n \geq u_p > p$.
En résumé à partir d'un certain rang p, tous les termes de la suite (u_n) sont plus grands que M.
En conclusion, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. □

Complément(s) :

Lire la vidéo « Démonstration : (u_n) croissante et non majorée $\Longrightarrow \lim u_n = +\infty$ ».

Propriété 4.28 :

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n = +\infty.$$

Exemple 4.29 :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Résoudre $n^2 > 10\,000$ puis $n^2 > M$ (avec $M > 0$).
2. Résoudre $\sqrt{n} > 200$ puis $\sqrt{n} > M$ (avec $M > 0$).

II. Propriétés des limites

Remarque 4.30 :

Suivant les cas que nous allons voir, il est possible de ne pas pouvoir conclure. On dit alors qu'on a une « Forme Indéterminée »(notée F.I.).

De manière générale, il faut retenir que les formes indéterminées sont : « $+\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »et « $\dfrac{0}{0}$ ».

En pratique, lorsqu'on rencontre un tel problème, il faut modifier l'aspect de la suite, développer ou factoriser par exemple.

1. La limite d'une somme

Propriété 4.31 :

On considère deux suites (u_n) et (v_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$						

Exemple 4.32 :

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = n^2 + n - 7.$$

2. La limite d'un produit

Propriété 4.33 :

On considère deux suites (u_n) et (v_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n =$						

Exemple 4.34 :

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = (2 - n^3)\sqrt{n}.$$

Propriété 4.35 :

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$.

Démonstration 4.36 :

On démontre cette propriété par récurrence sur k.

- Initialisation : Ici $k = 1$. Il est trivial que $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.
  De plus, on a vu dans III. que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$.
- Hérédité : On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété est vraie au rang k, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$.
  Démontrons que la propriété est vraie au rang $k+1$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{k+1} = +\infty$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n^{k+1} = n^k \times n$.
  De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$ (hypothèse de récurrence) et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, il vient par produit que :
  $$\lim_{n \to +\infty} n^k \times n = \lim_{n \to +\infty} n^{k+1} = +\infty.$$
  La propriété est donc héréditaire.
- Conclusion : La propriété est vraie au rang $k = 1$ et héréditaire à partir de ce rang donc :
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$. $\square$

Théorème 4.37 : — ***Limite des suites arithmétiques***

On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r.

- Si $r > 0$, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Si $r = 0$, la suite (u_n) converge vers u_0.
- Si $r < 0$, la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Démonstration 4.38 :

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ une suite arithmétique peut s'écrire sous la forme $u_n = u_0 + nr$.

- Si $r > 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} nr = +\infty$ (par produit) et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_0 + nr = +\infty$ (par somme).
- Si $r = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$.
- Si $r < 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} nr = -\infty$ (par produit) et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_0 + nr = -\infty$ (par somme). $\square$

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 13 et 16 p. 61

3. Limite d'un inverse

Propriété 4.39 :

On considère une suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0 ($u_n > 0$ pour tout $n > n_0$)	0 ($u_n < 0$ pour tout $n > n_0$)
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} =$				

Exemple 4.40 :

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{3+n^3}$.

Propriété 4.41 :

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$.

Démonstration 4.42 :

On a vu dans la partie 2. que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Donc par passage à l'inverse, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0.$$

□

Complément(s) :

Lire la méthode 1 p. 47 : « Déterminer une limite en utilisant les opérations ».

4. Limite d'un quotient

Propriété 4.43 :

On considère deux suites (u_n) et (v_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	∞	0	$\ell' \neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$						

Remarque 4.44 :

Le signe de ∞ sera donné par le signe du quotient des limites.

Exemple 4.45 :

Conjecturer puis déterminer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{9n-2}{3n-5}$.

Complément(s) :

Lire la vidéo « Calculer une limite avec les formules d'opérations ».

✎ Exercice(s) :

Exercices 14 et 17 p. 61

5. Les théorèmes de comparaison

Théorème 4.47 : — Théorème d'Encadrement dit des Gendarmes

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifiant les conditions suivantes :

- à partir d'un certain rang, on a :

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

Complément(s) :

Lire la Méthode 2 p. 49 : « Déterminer la limite d'une suite avec le théorème des gendarmes ».

Exemple 4.48 :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{n+\sin(n)}{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{-1+n}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1+n}{n}$.
2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Complément(s) :

Lire la vidéo « Calculer la limite d'une suite à l'aide du théorème d'encadrement ».

Propriété 4.50 :

On considère deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant les conditions suivantes :

- à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration exemplaire 4.51 :

On considère deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant les conditions suivantes :

- à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$: il existe donc un rang N_1 tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $u_n \leqslant v_n$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$: quelque soit $M > 0$, il existe un entier N_2 tel que pour tout $n \geqslant N_2$, $u_n \geqslant M$.

Ainsi, quelque soit $M > 0$, il existe un rang $N = \max(N_1; N_2)$ tel que pour tout $n \geqslant N$ (c'est-à-dire $n \geqslant N_1$ et $n \geqslant n_2$), on a :

$$u_n \leqslant v_n \quad \text{et} \quad u_n \geqslant M \iff v_n \geqslant u_n \geqslant M.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. □

Complément(s) :

Lire la Méthode 1 p. 49 : « Déterminer une limite par comparaison ».

✎ Exercice(s) :

Exercices 23 et 25 p. 62

Propriété 4.52 :

On considère une suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = q^n$.

- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- Si $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration exemplaire 4.53 :

On considère une suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = q^n$ et on prend $q > 1$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, on a

$$(1+a)^n \geqslant 1 + n\,a.$$

   Cette inégalité est appelée inégalité de Bernoulli.
2. En posant $q = 1 + a$, en déduire la limite de la suite (u_n). □

✎ Exercice(s) :

Exercices 26 et 29 p. 62/63.

Complément(s) :

Lire les Méthodes 1 et 2 p. 51 : « Déterminer la limite d'une suite du type (q^n) » et « Etudier la convergence d'une suite géométrique ».

Complément(s) :

Lire la vidéo « Calculer la limite d'une suite à l'aide du théorème de comparaison ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice Bilan : exercice 77 p. 70.