# Chapitre 11
# Loi Binomiale

## Sommaire


**I. Successions d'épreuves indépendantes** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2**
**II. La loi de Bernoulli** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **2**
**III. La loi binomiale** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **4**
1. Définition de la loi binomiale . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
2. Espérance, variance et écart-type de la loi binomiale . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5


| **Capacités :** | **Exercices :** | Non Acquis | Acquis |
|---|---|---|---|
| Modéliser et représenter une succession d'épreuves | | | |
| Calculer des probabilités dans le cadre d'une succession d'épreuves ind. | | | |
| Modéliser une situation par une loi binomiale | | | |
| Calculer une probabilité dans le cadre d'une loi binomiale | | | |
| Calculer une probabilité dans le cadre d'une loi binomiale | | | |
| Simuler, avec Python, une loi binomiale | | | |

## Introduction

Jaques BERNOULLI (1654 à 1705) est le premier d'une grande dynastie de mathématiciens suisses. Il voyage en France, Angleterre et dans les Flandres pour y rencontrer des scientifiques de renom. Il retourne en 1687 en Suisse jusqu'à sa mort et c'est à partir de là que ces principaux travaux datent.
Son père s'acharna à l'empêcher d'étudier les mathématiques et l'astronomie : il choisit d'ailleurs l'emblème de Phaeton (fils du dieu Soleil dans la mythologie grecque).

# I. Successions d'épreuves indépendantes

**✎ *Exercice(s) :***

Exercices 4, 5 et 8 p. 420

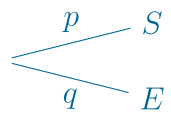
# II. La loi de Bernoulli

***Définition 11.1 :* — *Epreuve de Bernoulli***

Une épreuve de Bernoulli est une expérience ayant deux issues :

- La première issue est appelée *succès* (notée S) de probabilité $p$ ;
- La seconde issue est appelée *échec* (notée E ou $\overline{S}$), de probabilité $q = 1 - p$.

On résume une telle expérience par l'arbre pondéré suivant :



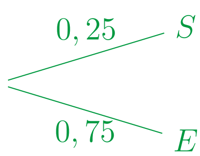

***Définition 11.2 :* — *la loi de Bernoulli***

On considère une expérience de Bernoulli.
A cette expérience, on associe la variable aléatoire $X$ qui prend comme valeur 0 en cas d'échec et 1 lors d'un succès.
On dit alors que la variable aléatoire $X$ suit *une loi de Bernoulli* de paramètre $p$ (probabilité du succès) et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$.
On donne la loi de probabilité de $X$ dans le tableau ci-dessous :

| $k$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $P(X = k)$ | $1 - p$ | $p$ |

***Exemple 11.3 :***

On souhaite répondre à une question à choix multiple (QCM) ayant une seule bonne réponse parmi 4 propositions.
L'arbre pondéré modélisant le lancer d'une pièce est donné ci-contre :




La variable aléatoire $X$ associée à cette expérience de Bernoulli suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,25$ dont on donne la loi de probabilité dans le tableau ci-dessous :

| $k$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $P(X = k)$ | $0,75$ | $0,25$ |

Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle simule cette expérience.

***Propriété 11.4 :***

L'espérance d'une variable aléatoire $X$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p$ est :

$$\mathbb{E}(X) = p.$$

***Démonstration 11.5 :***

On considère une variable aléatoire $X$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p$.
On donne alors la loi de probabilité de $X$ dans le tableau ci-dessous :

| $k$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $P(X = k)$ | $1 - p$ | $p$ |

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0 \times (1 - p) + 1 \times p \\ &= p.\end{aligned}$$

□

***Propriété 11.6 :***

La variance d'une variable aléatoire $X$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p$ est :

$$\mathbb{V}(X) = p(1 - p).$$

L'écart-type est donc :

$$\sigma = \sqrt{p(1 - p)}.$$

***Exemple 11.7 :***

On considère une variable aléatoire $X$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,45$.
L'espérance de $X$ est :

$$\mathbb{E}(X) = 0,45.$$

La variance de la variable aléatoire $X$ est :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= 0,45(1 - 0,45) \\ &= 0,45 \times 0,55 \\ &= 0,2475.\end{aligned}$$

L'écart type est alors :

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\mathbb{V}(X)} \\ &= \sqrt{0,2475} \\ &\approx 0,497.\end{aligned}$$

***Définition 11.8 : d'un schéma de Bernoulli***

La répétition de $n$ expériences de Bernoulli identiques et indépendantes est *un schéma de Bernoulli* qui se représente par un arbre pondéré ayant $n$ niveaux.

# III. La loi binomiale

## 1. Définition de la loi binomiale

***Définition 11.9 :*** ***de la loi binomiale***

Lors de la répétition de $n$ épreuves de Bernoulli, qui sont identiques et indépendantes, on définit la variable aléatoire $X$ comme le nombre de succès obtenus à la fin des $n$ épreuves.
On dit que $X$ suit *une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$* (où $p$ est la probabilité de succès de l'épreuve de Bernoulli) et on peut écrire :

$$X \sim \mathcal{B}(n;p).$$

***Exemple 11.10 :***

On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 trois fois de suite.
On considère comme succès l'événement $S$ : « La face obtenue est un multiple de 3 ».
Justifier que la variable aléatoire $X$ associé au nombre de succès suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

***Propriété 11.11 :***

On considère une variable aléatoire $X$ suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.
Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$P(X=k) = \binom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k}.$$

***Démonstration 11.12 :***

En utilisant un schéma de Bernoulli, un chemin aboutissant à $k$ succès parmi les $n$ épreuves a bien pour probabilité $p^k \cdot q^{n-k}$.
En effet, un tel chemin se compose de $k$ branches pondérées de $p$ (pour les $k$ succès $S$) et $n-k$ branches pondérées de $q = 1-p$ (pour les $n-k$ échecs $E$).
De plus, il y a $\displaystyle\binom{n}{k}$ chemins aboutissant à ce résultat.
On obtient alors le résultat suivant :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

□

***Exemple 11.13 :***

Déterminer la loi de probabilité d'une loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=0,45$.

***Complément(s) :***

Pour calculer $P(X = k)$ lorsque $X \sim \mathcal{B}(n; p)$, on peut utiliser la calculatrice :

- Sur Texas Instrument : $\boxed{\text{2nde}}$, puis $\boxed{\text{var}}$, puis dans le menu Distrib, choisir : BinomFdP.
  On écrit alors :
  BinomFdp(n,p,k)
- Sur Casio : $\boxed{\text{OPTN}}$, puis STAT, DIST, BINOMIAL puis Bpd.
  On écrit alors :
  BinomialPD(k,n,p)

***Complément(s) :***

Pour calculer $P(X \leqslant k)$ lorsque $X \sim \mathcal{B}(n; p)$, on peut utiliser la calculatrice :

- Sur Texas Instrument : $\boxed{\text{2nde}}$, puis $\boxed{\text{var}}$, puis dans le menu Distrib, choisir : BinomFRép.
  On écrit alors :
  BinomFRép(n,p,k)
- Sur Casio : $\boxed{\text{OPTN}}$, puis STAT, DIST, BINOMIAL puis BCD.
  On écrit alors :
  BinomialCD(k,n,p)

***Exemple 11.14 :***

On considère lla variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(35; 0,62)$.

1. Calculer $P(X = 30)$.
2. Calculer $P(X \leqslant 22)$.
3. Calculer $P(X < 17)$.
4. Calculer $P(X > 10)$.

***Complément(s) :***

Méthode 2 p. 411 « Déterminer une loi binomiale ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 11, 19, 22 p. 421

## 2. Espérance, variance et écart-type de la loi binomiale

***Propriété 11.15 :***

On considère une variable aléatoire $X$ suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.

- L'espérance de $X$ est donnée par :
$$\mathbb{E}(X) = np.$$
- La variance de $X$ est donnée par :
$$\mathbb{V}(X) = np(1-p).$$
- L'écart-type de $X$ est donné par :
$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}.$$

***Exemple 11.16 :***

On considère la variable aléatoire $X$ suivant une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,4$.

On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 4 \times 0,4 \\ &= 1,6.\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= 4 \times 0,4 \times 0,6 \\ &= 0,96.\end{aligned}$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\mathbb{V}(X)} \\ &= \sqrt{0,96}.\end{aligned}$$

***Complément(s) :***

Méthode 1 p. 411 « Reconnaitre un schéma de Bernoulli ».

***Complément(s) :***

Méthode 3 p. 411 « Etudier une situation avec une loi binomiale ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 26 et 34 p. 422/424.

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice Bilan : 86 p. 431.