Chapitre 6
Produit Scalaire

Sommaire

I. Les formules des normes

1. Rappels sur les normes

Définition 6.1 : ***Norme d'un vecteur***

On considère un vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan et soient A et B deux points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

. . . .

. . . .

. . . .

Propriété 6.2 :

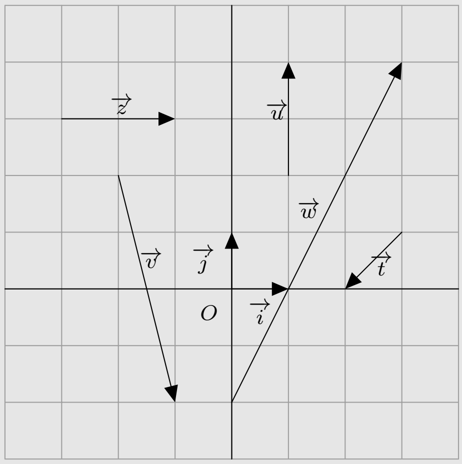
Dans une base orthonormée du plan, si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors . . . .

Propriété 6.3 :

On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan.

- Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a : ....
- L'inégalité triangulaire : ....
- On a : ....

Exercice(s) :



On considère le repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ suivant :

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs placés dans le plan.
2. Calculer la norme de chacun des vecteurs.

2. Les formules des normes

Définition 6.4 : ***Produit scalaire***

On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan.

....

....

....

....

Remarque 6.5 :

....

....

Remarque 6.6 :

Soient A, B et C trois points du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

....

....

....

Exemple 6.7 :

Dans un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on a $A(-1;2)$, $B(3;7)$ et $C(10;12)$.

1. Calculer AB, AC et BC.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. Calculer les produits scalaires suivants :

   (a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

   ....

   ....

   (b) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

   ....

   ....

   (c) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

   ....

   ....

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 56 p. 234

Théorème 6.8 : Expression analytique du produit scalaire

Dans une base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On a alors :

....

....

Exemple 6.9 :

Dans une base orthonormée du plan, on considère $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$.
Calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$.

....
....
....
....
....

Démonstration 6.10 :

Dans une base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

On a :

$||\overrightarrow{u}||^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et $||\overrightarrow{v}||^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ensuite, on a :

$$\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a :

$||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Complément(s) :

Vidéo « Calculer un produit scalaire avec des coordonnées »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 11 p. 227, 51 et 52 p. 234

Propriété 6.11 : ***Une autre formule avec les normes***

Dans une base orthonormée du plan, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Démonstration 6.12 :

Dans une base orthonormée du plan, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

De plus, on a :

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad \|\overrightarrow{v}\|^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dans cette même base orthonormée, on a :

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}.$$

Et donc, on a :

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Finalement, on obtient :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Définition 6.13 : ***Carré scalaire***

. . . .

. . . .

. . . .

Propriété 6.14 :

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan, on a :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Démonstration 6.15 :

Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan.

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}^2 &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Exemple 6.16 :

Dans une base orthonormée, on considère $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

Calculer $\overrightarrow{u}^2$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. Propriétés algébriques

Propriété 6.17 : ***Bilinéarité et Symétrie***

On considère trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- . . . .

  . . . .

- . . . .
  - . . . .
  - . . . .

Propriété 6.18 : ***Identités Remarquables***

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a :

- $$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
  $$||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
- $$(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
  $$||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
- $$\begin{aligned}(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Démonstration 6.19 :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

- On a :
  $$\begin{aligned}(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$
- En remplaçant $\overrightarrow{v}$ par $-\overrightarrow{v}$ dans le point précédent, on obtient :
  $$||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
- On a :
  $$\begin{aligned}(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Complément(s) :

Vidéo « Calculer un produit scalaire par bilinéarité »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 14 p. 227, 54, 56 et 58 p. 236

II. La formule du cosinus

Théorème 6.20 : La formule du cosinus

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et θ une mesure de l'angle formé par ces deux vecteurs.

Alors :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Remarque 6.21 :

On considère trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriété 6.22 : Cas particuliers : 2 vecteurs colinéaires

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors :

  $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire, alors :

  $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque 6.23 :

De la dernière propriété, on en déduit que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et colinéaires, on a :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Complément(s) :

Vidéo « Calculer un produit scalaire à l'aide d'un cosinus »

Complément(s) :

Vidéo « Calculer la mesure d'un angle à partir du produit scalaire »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 52, 53 p. 234

III. La formule du projeté orthogonal

Définition 6.24 : — Projeté orthogonal d'un point sur une droite

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Théorème 6.25 : — Formule du projeté orthogonal

Soient A, B, C et D quatre points du plan (A et B étant distincs) et soit H et K les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB).
Alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}.$$

Complément(s) :

Vidéo « Calculer un produit scalaire par projection orthogonale »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 9, 10 p. 226 et 50 p. 234

✎ ***Exercice(s) :***

On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 5$ et $AD = 3$. On note E le point de $[CD]$ tel que $DE = 1$.

1. Représenter géométriquement la situation.
2. En utilisant la relation de Chasles, montrer que :
$$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EC} + DA^2.$$
3. En déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{EA.EB}$.
4. Justifier alors que $\cos\left(\widehat{AEB}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.
En déduire une mesure en degré de l'angle $\widehat{AEB}$ (valeur arrondie au degré près).