Chapitre 1
Calcul litteral 1

Sommaire

Capacités :	**Exercices :**	**Bilan :**				
Développer et factoriser des expressions	Exercices du cours					
Développer/factoriser des identités remarquables	61 et 67 p. 51					
Transformer des expressions fractionnaires	44, 45, 49, 50 p. 50					
Transformer des expressions avec des puissances	15, 84 à 88 p. 46/52					

Richard DEDEKIND (1831 à 1916) est d'abord intéressé par la physique et la chimie, puis il se tourne vers les mathématiques de par la précision de cette matière.
Il construit l'ensemble des nombres réels en même temps que les mathématiciens MERAY et CANTOR par une méthode dite des coupures et définit alors sur cet ensemble un ordre, une multiplication et une addition.
Une anecdote :

> DEDEKIND a lu sa propre mort dans *Calendrier des mathématiciens* à la date du 4 septembre 1899. Il répondu alors à l'auteur que ce jour là, il avait eu un entretien avec CANTOR et « qui, à cette occasion, ne me donna pas à moi, mais à mes erreurs, le coups de grâce ».

Automatismes

I. Développer et factoriser

1. Développer

Définition 1.1 : ***Développer***

Dévelo

différence) de terme

distributivité.

Exemple 1.2 :

Dire si les nombres suivants sont écrits sous leur forme développée :

- $A = x^2 - 4x$

  L'ex A e

  x^2 et $4x$: il s'agit donc d'une forme dé-
  velo

- $B = 2(4x - 1)$

  L'ex B e

  nombre 2 avec $4x - 1$: il ne s'agit donc
  pas d'une ex

Propriété 1.3 : ***Distributivité***

La distributivité :

$$\xrightarrow{\text{Distribuer}}$$

$$A(B + C) = A \times B + A \times C$$

$$\xrightarrow{\text{Distribuer}}$$

$$A(B - C) = A \times B - A \times C$$

La double distributivité :

$$\xrightarrow{\text{Distribuer}}$$

$$(A + B)(C + D) = A \times C + A \times D + B \times C + B \times D$$

Exemple 1.4 :

Développer les égalités suivantes :

- $C = x(x^2 - 5x + 1)$
  On a :
$$\begin{aligned} C &= x(x^2 - 5x + 1) \\ &= x \times x^2 + x \times (-5x) + x \times 1 \\ &= x^3 - 5x^2 + x. \end{aligned}$$
- $D = (2x + 1)(-4x + 7)$
  On a :
$$\begin{aligned} D &= (2x + 1)(-4x + 7) \\ &= 2x \times (-4x) + 2x \times 7 + 1 \times (-4x) + 1 \times 7 \\ &= -8x^2 + 14x - 4x + 7 \\ &= -8x^2 + 10x + 7. \end{aligned}$$

Complément(s) :

Vidéo « Développer une expression (1) ».

Complément(s) :

Vidéo « Développer une expression (2) ».

✎ ***Exercice(s) :***

Déterminer la forme développée de chacune des expressions suivantes :

1. $A = (x - 1)(7x + 3) + 5(7x - 3)$;
2. $B = (x - 8)(9x + 1) - 3(3 - 3x)$;
3. $C = (x - 5)(9x + 3) + 5(9x - 3)$;
4. $D = 2(5x + 3)(x + 5) - 5(9x + 5)$.

2. Factoriser

Définition 1.7 : ***Factoriser***

Factoriser c'e

Un de

commun ».

Exemple 1.8 :

Dire si les nombres suivants sont écrits sous leur forme factorisée :

- $E = x^2 - 4x$
  L'ex E e
  x^2 et $4x$: il ne s'agit pas d'une forme factorisée.
- $F = 2(4x - 1)$
  L'ex F e
  nombre 2 et $4x - 1$: il s'agit donc d'une forme factorisée.

Propriété 1.9 : ***Distributivité***

La distributivité :

$$\xleftarrow{\text{Factoriser}}$$

$$A(B + C) = A \times B + A \times C$$

$$\xleftarrow{\text{Factoriser}}$$

$$A(B - C) = A \times B - A \times C$$

La double distributivité :

$$\xleftarrow{\text{Factoriser}}$$

$$(A + B)(C + D) = A \times C + A \times D + B \times C + B \times D$$

Exemple 1.10 :

Factoriser les égalités suivantes :

- $G = x^2 - 5x$
  On a :
  $$\begin{aligned} G &= x^2 - 5x \\ &= x(x - 5). \end{aligned}$$
- $H = 3x^3 - 6x^2 + 9x$
  On a :
  $$\begin{aligned} H &= 3x^3 - 6x^2 + 9x \\ &= 3(x^3 - 2x^2 + 3x) \\ &= 3x(x^2 - 2x + 3). \end{aligned}$$

Complément(s) :

Vidéo « Factoriser une expression (2) ».

✎ *Exercice(s) :*

Déterminer la forme factorisée de chacune des expressions suivantes :

1. $E = 7(9-5x) - (9-5x)(8x+2)$;
2. $F = (6-5x)(x-7) - 8x(6-5x)$;
3. $G = (8-x)(2x+6) - 6(2x+6)$;
4. $H = -(4x+1)(6-x) + 5x(6-x)$.

Complément(s) :

Vidéo « Forme factorisée VS forme développée ».

II. Les identités remarquables

Propriété 1.13 :

On a 3 identités remarquables :

$$\xleftarrow{\text{Factoriser}}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

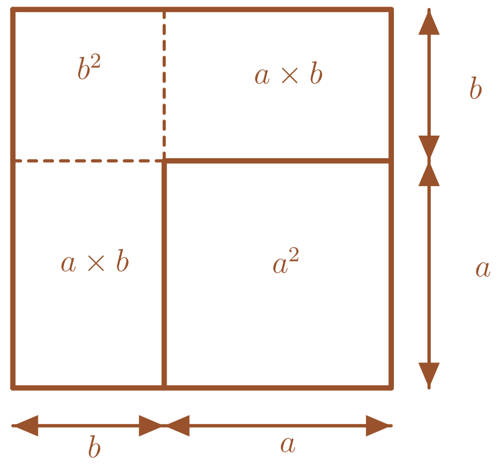
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\xrightarrow[\text{Dévelo}]{}$$

Démonstration 1.14 :

On a :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a\times a + a\times b + b\times a + b\times b\\ &= a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$



En schématisant par de
bien l'ex

On a :

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a\times a + a\times(-b) - b\times a - b\times(-b)\\ &= a^2 - 2ab + b^2.\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}(a-b)(a+b) &= a\times a + a\times b - b\times a - b\times b\\ &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

Exemple 1.15 :

1. Développer, à l'aide des identités remarquables, les expressions suivantes :
   - $I = (x-2)^2$

     On a :

     $$\begin{aligned}I &= (x-2)^2\\ &= x^2 - 2\times x\times 2 + 2^2\\ &= x^2 - 4x + 4.\end{aligned}$$

   - $J = (3x-1)(3x+1)$

     On a :

     $$\begin{aligned}J &= (3x-1)(3x+1)\\ &= (3x)^2 - 1^2\\ &= 9x^2 - 1.\end{aligned}$$

Exemple 1.15(suite) :

2. Factoriser, à l'aide des identités remarquables, les expressions suivantes :
   - $K = 144 - x^2$

     On note que $144 = 12^2$. On a :

$$\begin{aligned} K &= 144 - x^2 \\ &= 12^2 - x^2 \\ &= (12 + x)(12 - x). \end{aligned}$$

   - $L = 49 + 14x + x^2$.

     On a :

$$\begin{aligned} L &= 49 + 14x + x^2 \\ &= 7^2 + 2 \times 7 \times x + x^2 \\ &= (7 + x)^2 \end{aligned}$$

Complément(s) :

Savoir-faire 2 « Développer à l'aide des identités remarquables » page 44.

Complément(s) :

Vidéo « Développer à l'aide des identités remarquables ».

✎ Exercice(s) :

Exercice 61 page 51.

Complément(s) :

Savoir-faire 3 « Factoriser à l'aide des identités remarquables » page 45.

Complément(s) :

Vidéo « Factoriser à l'aide des identités remarquables ».

✎ Exercice(s) :

Exercice 67 page 51.

III. Calculer avec des fractions

Définition 1.18 : Fraction

Une fraction e
non nul.

$$\frac{A}{B}.$$

On dit que :

- A e
- B le dénominateur.

Exemple 1.19 :

Donner la valeur du dénominateur et du numérateur :

- $M = \frac{12}{23}$

  Le numérateur e 12 et le dénominateur e 23.

- $N = \frac{3x-1}{4}$

  Le numérateur e $3x-1$ et le dénominateur e 4.

- $O = \frac{x-1}{-2x+7}$

  Le numérateur e $x-1$ et le dénominateur e $-2x+7$.

Propriété 1.20 :

Pour tout $A \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$ et $C \neq 0$, on a :

$$\frac{A}{B} = \frac{A \times C}{B \times C}$$

$$A \times \frac{B}{C} = \frac{A \times B}{C} = \frac{A}{C} \times B = A \times B \times \frac{1}{C}.$$

Remarque 1.21 :

Cette dernière pro
Avant de simplifier, il faut factoriser numérateur et dénominateur.

Exemple 1.22 :

Simplifier les quotients suivants :

- $P = \dfrac{33}{121}$
  On a :
  $$\begin{aligned} P &= \frac{33}{121} \\ &= \frac{3 \times 11}{11 \times 11} \\ &= \frac{3}{11} \end{aligned}$$

- $Q = \dfrac{3x-12}{4x-16}$
  On a :
  $$\begin{aligned} Q &= \frac{3x-12}{4x-16} \\ &= \frac{3(x-4)}{4(x-4)} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

- $R = \dfrac{x^2-4}{x+2}$
  On a :
  $$\begin{aligned} R &= \frac{x^2-4}{x+2} \\ &= \frac{x^2-2^2}{x+2} \\ &= \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} \\ &= x-2 \end{aligned}$$

Définition 1.23 : ***Fraction irréductible***

Une fraction e

minateur n'ont pas de diviseur en commun.

Exemple 1.24 :

Ecrire sous une forme irréductible les fractions suivantes :

- $S = \dfrac{27}{4}$
  On a :
  $$\begin{aligned} S &= \frac{27}{4} \\ &= \frac{3 \times 3 \times 3}{2 \times 2}. \end{aligned}$$
  On ne peut rien simplifier : $\dfrac{27}{4}$ e
  ductible.

- $T = \dfrac{18}{4}$
  On a :
  $$\begin{aligned} T &= \frac{18}{4} \\ &= \frac{2 \times 3 \times 3}{2 \times 2} \\ &= \frac{3 \times 3}{2}. \end{aligned}$$
  On ne peut rien simplifier : $\dfrac{9}{2}$ e
  ductible.

- $U = \dfrac{150}{105}$
  On a :
  $$\begin{aligned} U &= \frac{5 \times 5 \times 2 \times 3}{5 \times 7 \times 3} \\ &= \frac{10}{7}. \end{aligned}$$
  On ne peut rien simplifier : $\dfrac{10}{7}$ e
  ductible.

✎ *Exercice(s) :*

Exercices 44 et 45 page 55.

Propriété 1.25 : Addition et Soustraction de Fractions

Pour tous $A \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$ et $C \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A+C}{B} \qquad \text{et} \qquad \frac{A}{B} - \frac{C}{B} = \frac{A-C}{B}$$

De plus, pour tous $A \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$ et $D \neq 0$, on a :

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \times D}{B \times D} + \frac{C \times B}{B \times D}$$

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A \times D}{B \times D} - \frac{C \times B}{B \times D}$$

Complément(s) :

Savoir-faire 1 page 44 : « Transformer une écriture fractionnaire ».

Complément(s) :

Vidéo « Réduire au même dénominateur ».

Exemple 1.27 :

Calculer (en écrivant sous la forme d'une fraction) les nombres suivants :

- $V = \dfrac{12}{7} - \dfrac{9}{7}$

  On a :

$$\begin{aligned} V &= \frac{12}{7} - \frac{9}{7} \\ &= \frac{12-9}{7} \\ &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

- $W = \dfrac{3}{x} + \dfrac{x+1}{x-1}$

  On a :

$$\begin{aligned} W &= \frac{3}{x} + \frac{x+1}{x-1} \\ &= \frac{3(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x(x+1)}{x(x-1)} \\ &= \frac{3(x-1)+x(x+1)}{x(x-1)} \\ &= \frac{3x-3+x^2+x}{x(x-1)} \\ &= \frac{x^2+4x-3}{x(x-1)} \end{aligned}$$

- $X = \dfrac{4}{5} + \dfrac{7}{3}$

  On a :

$$\begin{aligned} X &= \frac{4}{5} + \frac{7}{3} \\ &= \frac{4\times 3}{5\times 3} + \frac{7\times 5}{3\times 5} \\ &= \frac{12}{15} + \frac{35}{15} \\ &= \frac{12+35}{15} \\ &= \frac{47}{15} \end{aligned}$$

- $Y = \dfrac{8-x}{x-2} - \dfrac{x}{x+5}$

  On a :

$$\begin{aligned} Y &= \frac{8-x}{x-2} - \frac{x}{x+5} \\ &= \frac{(8-x)(x+5)}{(x-2)(x+5)} - \frac{x(x-2)}{(x+5)(x-2)} \\ &= \frac{8x+40-x^2-5x}{(x-2)(x+5)} - \frac{x^2-2x}{(x+5)(x-2)} \\ &= \frac{-x^2+3x+40-(x^2-2x)}{(x-2)(x+5)} \\ &= \frac{-x^2+3x+40-x^2+2x}{(x-2)(x+5)} \\ &= \frac{5x+40}{(x-2)(x+5)} \end{aligned}$$

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 49 et 50 page 50.

Propriété 1.28 : ***Produit et Quotient de Fractions***

Pour tous $A \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$ et $D \neq 0$, on a :

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{A \times C}{B \times D}$$

Pour tous $A \in \mathbb{R}$, $B \neq 0$, $C \neq$ et $D \neq 0$, on a :

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{A \times D}{B \times C}$$

Exemple 1.29 :

Calculer (en écrivant sous la forme d'une fraction) les nombres suivants :

- $Z = \frac{5}{2} \times \frac{3}{10}$

  On a :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{5}{2} \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{5 \times 3}{2 \times 10} \\ &= \frac{15}{20} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

- $\Gamma = \frac{\frac{3x-7}{2x}}{7x}$

  On a :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\frac{3x-7}{2x}}{7x} \\ &= \frac{3x-7}{2x} \times \frac{1}{7x} \\ &= \frac{(3x-7) \times 1}{2x \times 7x} \\ &= \frac{3x-7}{14x^2} \end{aligned}$$

Exemple 1.29(suite) :

- $\Omega = \frac{x}{2x-1} \times \frac{x-3}{x+5}$

  On a :

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{x}{2x-1} \times \frac{x-3}{x+5} \\ &= \frac{x(x-3)}{(2x-1)(x+5)} \\ &= \frac{x^2-3x}{(2x-1)(x+5)} \end{aligned}$$

- $\Delta = \frac{x}{\frac{x+3}{5}}$

  On a :

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{x}{\frac{x+3}{5}} \\ &= x \times \frac{5}{x+3} \\ &= \frac{5x}{x+3} \end{aligned}$$

IV. Calculer avec des puissances

Définition 1.30 : ***a* puissance *n***

On considère un nombre a et n un nombre entier.

Le nombre a^n et se lit « a puissance n » e

$$a^n = \underbrace{a \times \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$$

Par convention, $a^0 = 1$.

Exemple 1.31 :

Calculer les nombres suivants :

- $\Sigma = 3^4$

  On a :

$$\begin{aligned}\Sigma &= 3^4 \\ &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \\ &= 9 \times 9 \\ &= 81\end{aligned}$$

- $\Psi = (-5)^3$

  On a :

$$\Psi = (-5)^3 \& = (-5) \times (-5) \times (-5)$$
$$= 25 \times (-5)$$
$$= -125$$

Remarque 1.32 :

A noter, deux cas particuliers :

- a^2 se lit « a carré »
- a^3 se lit « a cube »

Propriété 1.33 : **Produit**

On considère deux nombres entiers n et m et deux nombres réels a et b.

Alors on a :

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Exemple 1.34 :

Ecrire les nombres sous la forme $\pm 2^{\cdots} \times 5^{\cdots}$:

- $\Xi = 10^2 \times 5^3$

  On a :

$$\begin{aligned} \Xi &= 10^2 \times 5^3 \\ &= (2 \times 5)^2 \times 5^3 \\ &= 2^2 \times 5^2 \times 5^3 \\ &= 2^2 \times 5^5 \end{aligned}$$

- $\Upsilon = (-2)^3 \times 2^2$

  On a :

$$\begin{aligned} \Upsilon &= (-2)^3 \times 2^2 \\ &= (-1 \times 2)^3 \times 2^2 \\ &= (-1)^3 \times 2^3 \times 2^2 \\ &= -2^5 \\ &= -2^5 \times 5^0 \end{aligned}$$

Propriété 1.35 : ***Puissance négative d'un nombre***

On considère un nombre réel a et un nombre entier n.

Alors on a :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Propriété 1.36 : ***Quotient***

On considère deux nombres réels a et b et deux nombres entiers n et m.

Alors on a :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \ (b \neq 0) \qquad \text{et} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \ (a \neq 0).$$

Exemple 1.37 :

Calculer les nombres suivants :

- $\Theta = \dfrac{10^2}{5^3 \times 2}$

  On a :

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{10^2}{5^3 \times 2} \\ &= \frac{(5 \times 2)^2}{5^3 \times 2} \\ &= \frac{2^2 \times 5^2}{5^3 \times 2} \\ &= 5^{-1} \times 2^1 \\ &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

- $\Pi = \dfrac{(-2)^4}{8}$

  On a :

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{(-2)^4}{8} \\ &= \frac{(-1 \times 2)^4}{2^3} \\ &= \frac{(-1)^4 \times 2^4}{2^3} \\ &= -2\end{aligned}$$

Propriété 1.38 : ***Puissance de puissance***

On considère deux nombres réels a et b et deux nombres entiers n et m.

Alors on a :

$$(a^n)^m = a^{n \times m}.$$

Exemple 1.39 :

Calculer le nombre suivant :

- $\Phi = \left(10^2\right)^3$

  On a :

$$\begin{aligned}\Phi &= \left(10^2\right)^3 \\ &= 10^6 \\ &= 1\,000\,000\end{aligned}$$

Complément(s) :

Savoir-Faire 4 page 46 « Simplifier des expressions avec des puissances ».

Complément(s) :

Vidéo « Appliquer les formules sur les puissances ».

Complément(s) :

Vidéo « Effectuer des calculs avec des puissances ».

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 15 page 46 et 84 à 88 page 52.