Chapitre 3
Complexes : point de vue géométrique

Sommaire

Capacités :	**Exercices :**	**Bilan :**				
Représenter un complexe/ Donner une affixe	1 à 3, 5 à 7, 10, 12, 45 et 46 p. 42					
Calculer le module d'un nombre complexe	18, 20 et 25 p. 43					
Utiliser la représentation géométrique d'un module	23, 31 et 36 p. 43					
Justifier l'appartenance à $\mathbb{U}$	24, 26 et 28 p. 43					
Forme trigonométrique $<->$ Forme algébrique	48 et 61 p. 44					

GAUSS (1777 à 1855) est un enfant prodige. Il pense ne pas avoir à apprendre de ses pairs et il est convaincu que ses recherches en astronomie contribuent à ses recherches en mathématiques. A la fin de sa carrière, il renoue à l'enseignement qu'il avait abandonné en 1805 suite à une rupture amoureuse, et forme des étudiants tels que DEDEKIND, RIEMANN ou EISENSTEIN.
Auteur de la notation sur les congruences $\equiv$.
Il se tourne vers une nouvelle approche de la géométrie : une approche plus analytique en étudiant de manière générale une courbe : c'est ce qu'on appelle la géométrie différentielle.
Appelé par certains « le prince des mathématiques », GAUSS est soucieux de se forger une image glorieuse de ses travaux en écrivant des anecdotes de recherches.

Complément(s) :

Vidéo « Les nombres complexes (partie 1) »

I. Représentation graphique d'un nombre complexe

1. L'affixe d'un point

Définition 3.1 : ***Affixe d'un point***

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$.

On considère un point $M(a;b)$ dans ce repère.

……………………………………………

……………………………………………

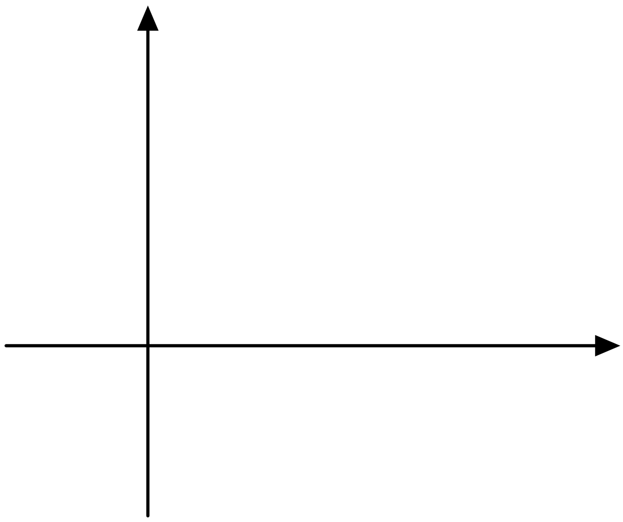
……………………………………………

……………………………………………

Dans ce cas, ……………………………

……………………………………………

……………………………………………



Remarque 3.2 :

- ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

Théorème 3.3 :

- ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………
- ……………………………………………………………………………………

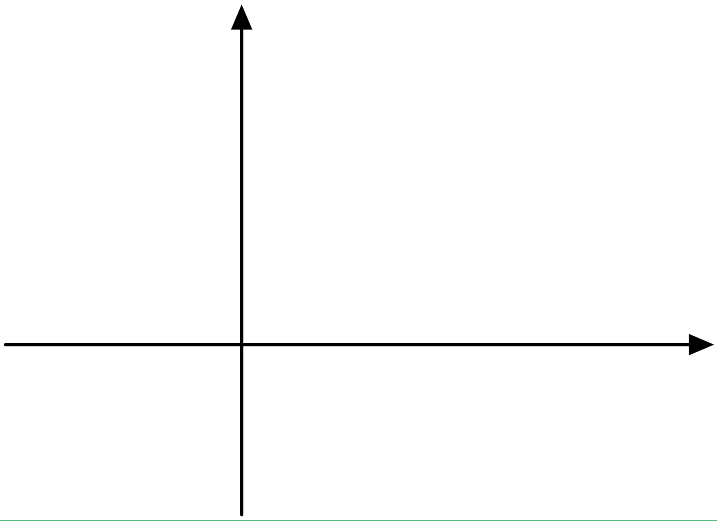
  ……………………………………………………………………………………

  ……………………………………………………………………………………

Exemple 3.4 :

Dans le plan complexe, placer les points M correspondant aux affixes z_M suivantes :

- $z_A = 1 + i$,
- $z_B = i$,
- $z_C = -2$,
- $z_D = -1 + 3i$.



Propriété 3.5 :

On considère deux points M et M' du plan complexe ayant pour affixes respectives z_M et $z_{M'}$.

M et M' sont confondus $\iff$ ....

$z_M \in \ldots\ldots \iff M \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$z_M \in \ldots\ldots \iff M \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 1 et 2 p. 42

Propriété 3.6 : — Affixe du milieu

Soient deux points A et B d'affixes respectives z_A et z_B dans le plan complexe.

Le milieu I de $[AB]$ a pour affixe :

$$z_I = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 3.7 :

On considère deux points A et B du plan complexe ayant pour affixes respectives $3 - 2i$ et $1 + i$.

Calculer l'affixe du point I, milieu de $[AB]$.

....

....

Complément(s) :

Exercice résolu 1 p. 33 « Utiliser des affixes de points »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 3 et 10 p. 42

2. L'affixe d'un vecteur

Définition 3.8 : ***Affixe d'un vecteur***

On considère un vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan et un point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.

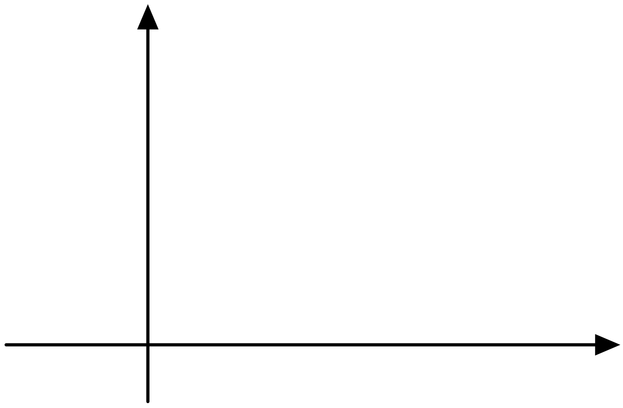
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .



Propriété 3.9 :

On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan complexe ayant pour affixes respectives $z_{\overrightarrow{u}}$ et $z_{\overrightarrow{v}}$ et λ un réel.

$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour affixe . . . . et $\lambda\overrightarrow{u}$ a pour affixe . . . .

Exemple 3.10 :

On considère $\overrightarrow{u}$ d'affixe $3 - 2\mathrm{i}$ et $\overrightarrow{v}$ d'affixe $-5 + 3\mathrm{i}$.

Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que $\overrightarrow{w} = 3\overrightarrow{u} - 7\overrightarrow{v}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

✎ *Exercice(s) :*

Exercice 5 p. 42

Propriété 3.11 : — ***Affixe d'un vecteur défini par deux points***

On considère deux points A et B d'affixes respectives z_A et z_B dans le plan complexe.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Exemple 3.12 :

On considère deux points A et B du plan complexe ayant pour affixes respectives $3 - 2\mathrm{i}$ et $1 + i$.

Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

....

....

....

....

....

....

Complément(s) :

Exercice résolu 2 p. 33 « Utiliser des affixes de vecteurs »

Complément(s) :

Exercice résolu 3 p. 33 « Déterminer un ensemble de points »

Complément(s) :

Vidéo « Déterminer l'affixe d'un vecteur »

Complément(s) :

Vidéo « Utiliser une affixe en géométrie »

✎ *Exercice(s) :*

Exercices 6, 7 et 12 p. 42

II. Module d'un nombre complexe

1. Définition du module d'un nombre complexe

Définition 3.13 : ***Module d'un complexe***

On appelle module de z, noté $|z|$, le nombre réel tel que :

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Exemple 3.14 :

Calculer le module du nombre complexe $z = 3 + 2i$.

....

....

....

....

....

Complément(s) :

Pour calculer le module d'un nombre complexe sur Numworks :

- « Boite à outils »
- « Nombres complexes »
- « $|z|$ »

Propriété 3.15 : ***L'inégalité triangulaire***

Pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Propriété 3.16 :

On considère un nombre complexe z dont l'écriture algébrique est $z = a + ib$, avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

On a alors :

$$|z| = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Exemple 3.17 :

Calculer les modules des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = i$
2. $z_2 = 1 + i$.
3. $z_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$
4. $z_4 = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Complément(s) :

Exercice résolu 1 p. 35 « Déterminer des modules à l'aide de la définition »

Complément(s) :

Vidéo « Calculer le module d'un nombre complexe (1) »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 18 et 20 p. 43.

2. Représentation graphique d'un module

Propriété 3.18 : Le module vu comme une distance

On considère un vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $z_{\overrightarrow{u}}$, et deux points A et B d'affixes respectives z_A et z_B dans le plan complexe.

On a alors :

$\dots\dots\dots\dots\dots = |z_{\overrightarrow{u}}|$. $\qquad \dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots\dots = |z_A|$ $\qquad \dots\dots\dots\dots\dots = |z_B - z_A|$.

Propriété 3.19 : Cercle et Médiatrice du plan complexe

On considère deux points A et B d'affixes respectives z_A et z_B dans le plan complexe.

- ....
  ....
  ....
  ....
  Autrement dit,

  ....

- ....
  ....
  ....
  ....
  Autrement dit,

  ....

Exemple 3.20 :

Caractériser géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

- $|z - 2 - 3\mathrm{i}| = 9$.

  ....
  ....
  ....
  ....

Exemple 3.20(suite) :

- $|z-2-\mathrm{i}| = |z-4+\mathrm{i}|$

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

Exercice(s) :

Exercices 23, 31 et 36 p. 43

3. Propriétés algébriques

Propriété 3.21 : Module d'un conjugué / d'un opposé

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

....

Remarque 3.22 :

- ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

- ....

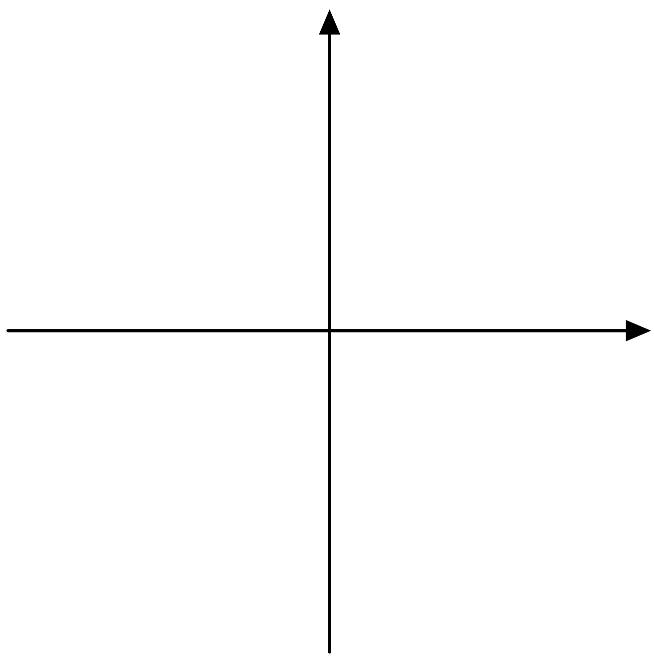
  ....

  ....

  ....

  ....

  ....



Propriété 3.23 : Produit des modules

Pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

....

Démonstration 3.24 :

Soit $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$.

....

....

....

....

....

....

....

Propriété 3.25 : — Module d'un inverse / quotient / carré / puissance

- Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

  ....

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

  ....

- Pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}^*$, on a :

  ....

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

  ....

Démonstration 3.26 :

- Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

  ....

Démonstration 3.26 (suite) :

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$|z^2| = |z \times z| \quad = |z| \times |z| = |z|^2.$$

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on considère la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$|z^n| = |z|^n.$$

Démontrons le résultat par récurrence.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exemple 3.27 :

Déterminer les modules des nombres suivants :

- $z_1 = -8i$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

- $z_2 = (3 + 5i)(11 - 7i)$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exemple 3.27(suite) :

- $z_3 = \left(\dfrac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{1-i}\right)^4$.

....

....

....

....

....

Complément(s) :

Exercice résolu 2 p. 35 « Déterminer des modules à l'aide de propriétés »

Complément(s) :

Exercice résolu 3 p. 35 « Utiliser des modules pour démontrer »

Complément(s) :

Vidéo « Calculer le module d'un nombre complexe (2) »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 20 et 25 p. 43

4. L'ensemble $\mathbb{U}$

Définition 3.28 : ***Ensemble $\mathbb{U}$***

....

....

....

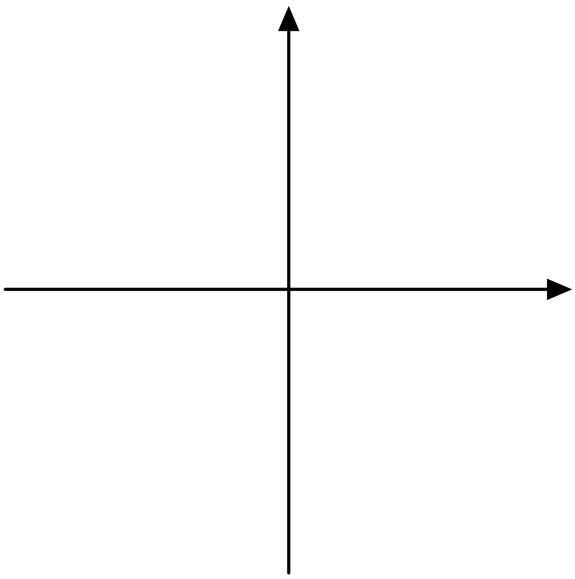
....

....

....

On note :

....



Exemple 3.29 :

Etudier l'appartenance des nombres suivant à $\mathbb{U}$.

- $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

....

....

....

....

....

....

....

- $z_2 = 1 - \frac{1}{2}i$.

....

....

....

....

....

....

....

Propriété 3.30 : ***Stabilité par inverse, produit et quotient***

- Soit $z \in \mathbb{U}$.

....

....

....

- Soient $z_1 \in \mathbb{U}$ et $z_2 \in \mathbb{U}$.

....

....

....

....

....

Démonstration 3.31 :

- Soit $z \in \mathbb{U}$.

....

....

....

....

....

Démonstration 3.31 (suite) :

- Soient $z_1 \in \mathbb{U}$ et $z_2 \in \mathbb{U}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

✎ Exercice(s) :

Exercices 24, 26 et 28 p. 43

Complément(s) :

Vidéo « Démontrer qu'un nombre complexe appartient à $\mathbb{U}$ »

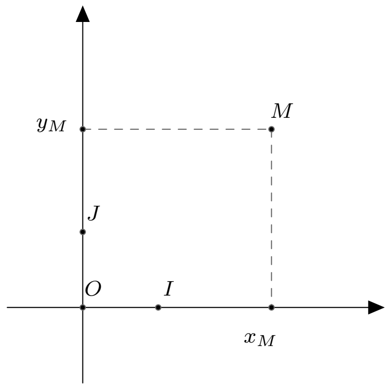
III. Forme trigonométrique d'un complexe non nul

Remarque 3.32 :

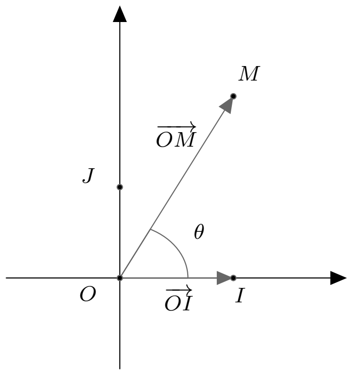
Il existe deux façons de situer un point dans le plan :

1. par des coordonnées cartésiennes dans un repère orthnormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$: un point M est repéré par son abscisse x_M et son ordonnée y_M ;
2. par des coordonées polaires : un point M est repéré par sa distance à l'origine OM et son angle $\theta = \left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}\right)$.

   Dans ce cas, il n'y a pas de repère mais un couple $\left(O; \vec{i}\right)$ (formé d'un point et d'un vecteur) où O est appelé le pôle.

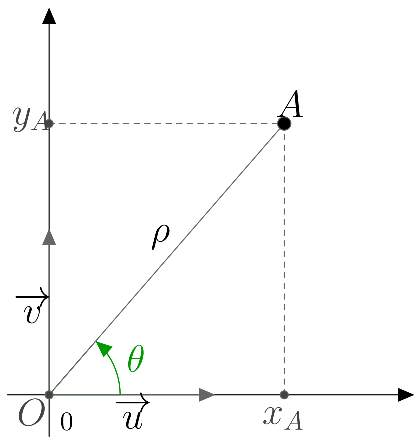


Coordonnées cartésiennes



Coordonnées polaires

Activité 3.33 :



On considère un point A dans le plan complexe $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'affixe $z_A = x_A + iy_A$, on note $\rho = OA$ et θ une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OA}\right)$.

1. Déterminer $\cos(\theta)$ en fonction de x_A et ρ.

....
....
....
....
....
....
....

2. Déterminer $\sin(\theta)$ en fonction de y_A et ρ.

....
....
....
....
....
....
....

3. Déterminer ρ en fonction de x_A et y_A.

....
....
....
....
....
....
....
....

4. Déterminer x_A en fonction de ρ et θ.

....
....
....
....
....
....
....
....

5. Déterminer y_A en fonction de ρ et θ.

....
....
....
....
....
....
....
....

Définition 3.34 : Forme trigonométrique d'un complexe

On considère une nombre complexe z_A non nul tel que $z_A = x_A + iy_A$, affixe d'un point A dans le plan complexe $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

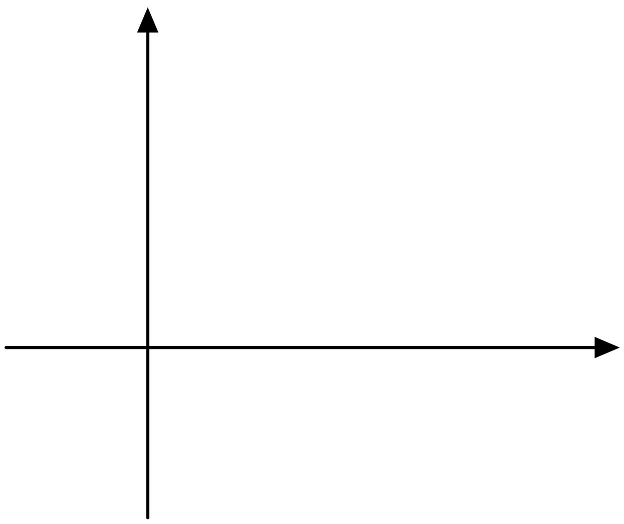
La forme trigonométrique de z_A est donnée par :

.... avec ....

- ρ est alors appelé ....,
- θ est alors appelé ....
  ....

Exemple 3.35 :

Dans un plan complexe, placer les points dont les affixes sont donnés ci-dessous et donner, par lecture graphique l'écriture trigonométrique des nombres complexes suivants :



1. $z_A = -i$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. $z_B = 1 + i$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. $z_C = \sqrt{3} - 1$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

4. $z_D = 3i$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

✎ ***Exercice(s) :***

Exercice 45, 46 et 57 p. 44

Complément(s) :

La calculatrice permet de calculer un argument d'un nombre complexe z.

- Sur NumWorks : ....
- Sur Casio : on accède au menu « Complexe » par la touche $\boxed{\text{OPTN}}$, puis menu CPLX (touche $\boxed{\text{F3}}$).

  La fonction calculant l'argument d'un complexe est la fonction « Arg ».

On notera que le résultat affiché est exprimé soit en degré soit en radians, selon le mode sélectionné.

Propriété 3.36 : — De la forme trigonométrique à la forme algébrique

On considère un nombre complexe z tel que sa forme trigonométrique est donnée par :

$$z = \rho\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big)$$

On a alors :

.... et ....

Méthodologie 3.37 : — Forme trigonométrique vers forme algébrique

Pour passer d'un nombre complexe écrit sous sa forme trigonométrique à son écriture sous forme algébrique, on développe.

Exemple 3.38 :

Donner l'écriture algébrique de $z = 3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

....

....

....

....

....

....

....

Complément(s) :

Vidéo « Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique »

Propriété 3.39 : — De la forme algébrique à la forme trigonométrique

On considère un nombre complexe z ($z \neq 0$) tel que sa forme algébrique est donnée par :

$$z = a + ib$$

On a alors :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

De plus, un argument θ de z est solution de :

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Méthodologie 3.40 : — Forme algébrique vers forme trigonométrique

Pour passer d'un nombre complexe écrit sous sa forme algébrique à son écriture sous forme trigonométrique, on procède de la manière suivante :

- ....
  ....
  ....
- ....
  ....
  ....
  ....
  ....

Exemple 3.41 :

Donner la forme trigonométrique de $z = -\sqrt{3} + i$.

Complément(s) :

Exercice résolu 1 p. 37 « Déterminer un argument d'un nombre complexe »

Complément(s) :

Vidéo « Déterminer un argument d'un nombre complexe »

Remarque 3.42 :

Attention : si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, z n'est écrit sous sa forme trigonométrique uniquement si $\boldsymbol{r > 0}$

Si $r < 0$, alors la forme trigonométrique de z est $-r\left(\cos(\pi+\theta) + i\sin(\pi+\theta)\right)$.

Complément(s) :

Exercice résolu 2 p. 37 « Déterminer la forme algébrique et une forme trigonométrique de nombres complexes »

Complément(s) :

Vidéo « Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique »

✎ ***Exercice(s) :***

Exercices 48 et 61 p. 44