## *Exercice 1 :* *(6 points)*

1. La fonction $h$ est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = -2x + 1$ et $v(x) = -3x^4 + x^2$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produite de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u'(x) = -2$ et $v'(x) = -12x^3 + 2x$
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= -2 \times (-3x^4 + x^2) + (-12x^3 + 2x)(-2x + 1) \\ &= 6x^4 - 2x^2 + 24x^4 - 12x^3 - 4x^2 + 2x \\ &= 30x^4 - 12x^3 - 6x^2 + 2x. \end{aligned}$$

*/2 points*

2. La fonction $i$ est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 12x + 3x^2$ et $v(x) = x^2 + 3$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$u'(x) = 12 + 6x \quad \text{et} \quad v'(x) = 2x.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} i'(x) &= \frac{(12 + 6x)(x^2 + 3) - 2x(12x + 3x^2)}{(x^2 + 3)^2} \\ &= \frac{12x^2 + 36 + 6x^3 + 18x - 24x^2 - 6x^3}{(x^2 + 3)^2} \\ &= \frac{-12x^2 + 18x + 36}{(x^2 + 3)^2} \end{aligned}$$

*/2 points*

3. La fonction $j$ est de la forme $x \longmapsto u(ax + b)$ où $u$ est la fonction racine carrée ($u(x) = \sqrt{x}$) et $ax + b = -2x + 3$. Elle est donc dérivable sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$.
De plus, pour tout $x \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$, on a :

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$, on a :

$$\begin{aligned} j'(x) &= a \times u'(ax + b) \\ &= -2 \times \frac{1}{2\sqrt{-2x + 3}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{-2x + 3}}. \end{aligned}$$

*/2 points*

## *Exercice 2 :* *(5 points)*

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2,5 \times 4x^3 - 15 \times 2x - 20 \\ &= 10x^3 - 30x - 20. \end{aligned}$$

*/1 point*

De plus, on a :

$$\begin{aligned} 10(x-2)(x+1)^2 &= (10x-20)(x^2+2x+1) \\ &= 10x^3 + 20x^2 + 10x - 20x^2 - 40x - 20 \\ &= 10x^3 - 30x - 20 \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

*/1 point*

2. Le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $(x-2)(x+1)^2$.
On a le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x+1)^2$ | | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

*/1,5 point*

3. 
- Pour tout $x \in ]-\infty; 2[$, on a $f'(x) \leqslant 0$, donc la fonction $f$ est décroissante sur cet intervalle.
- Pour tout $x \in ]2; +\infty[$, on a $f'(x) \geqslant 0$, donc la fonction $f$ est croissante sur cet intervalle.

*/1,5 point*

On a alors le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Var $f$ | | $\searrow$ | | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | |

### *Exercice 3 :* *(10 points)*

1.(a) On sait que l'aire du rectangle est de 49 m². De plus, l'aire du rectangle est égal à $x \times y$. Ainsi, on a :

$$x \times y = 49 \iff y = \frac{49}{x}$$

*/1 point*

Le périmètre du rectangle est donné par :

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 2x + 2 \times \frac{49}{x} \\ &= 2x + \frac{98}{x} \end{aligned}$$

*/1 point*

(b) Pour $x = 10$, on a un périmètre de $2 \times 10 + \frac{98}{10} = 29,8$ m. */1 point*

2.(a) On remarque que pour tout $x \in ]0; +\infty[$, on a $f(x) = 2 \times x + 98 \times \frac{1}{x}$. Ainsi, pour tout $x \in ]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times 1 + 98 \times \frac{-1}{x^2} \\ &= 2 - \frac{98}{x^2} \\ &= \frac{2x^2}{x^2} - \frac{98}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - 98}{x^2}. \end{aligned}$$

*/2 points*

(b) Pour tout $x \in ]0; +\infty[$, $x^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $2x^2 - 98$. $2x^2 - 98$ est une fonction polynôme du second degré, on étudie alors son signe. Soit $\Delta$ son discriminant. On a alors :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 0^2 - 4 \times 2 \times 98 \\ &= 784 \end{aligned}$$

Comme $\Delta > 0$, $2x^2 - 98$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-\sqrt{784}}{4} \\ &= -\frac{28}{4} \\ &= -7 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{\sqrt{784}}{4} \\ &= \frac{28}{4} \\ &= 7 \end{aligned}$$

*/2 points*

2.(b) *(Suite...)* Ainsi, on obtient le tableau de signe suivant :

| $x$ | $0$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Var $f$ | | $\searrow$ | $28$ | $\nearrow$ | |

***/1,5 point***

(c) D'après la lecture du tableau de variations donné en question précédente, le périmètre est minimal lorsque $x = 7$. ***/0,5 point***

De plus, si $x = 7$ alors $y = \dfrac{49}{7} = 7$. Le rectangle d'aire 49 m$^2$ dont le périmètre est minimal est un carré de côté 7 m. ***/1 point***

*D'après la Banque Nationale des Sujets*